ÉNIGMES TITANESQUES ET GLORIEUX PETITS PAS

Il y a quelques semaines, le mathématicien prodige australien Terence Tao démontrait un résultat remarquable : tout nombre entier impair $N > 1$ s'écrit comme somme d'au plus cinq nombres premiers — ces nombres qui ne sont divisibles que par 1 et par eux-mêmes (tels 2, 3, 5, 7, 11, 13 ...).

Ce théorème, améliorant un résultat du chercheur français Olivier Ramaré (qui avait besoin de six nombres premiers), s'inscrit dans une très ancienne quête. Chaque nombre entier est produit de nombres premiers : en un sens, comprendre les nombres premiers, c'est donc avoir la clé de tous les nombres entiers.

Comme le savait déjà Euclide il y a plus de deux mille ans, les nombres premiers sont en quantité infinie; mais que dire de plus ? Ces nombres semblent surgir à l'improviste, parfois très rapprochés, parfois très éloignés, sans que l'on sache que dire d'intelligent sur ces écarts.

Après les travaux pionniers des Fermat, Euler, Gauss, Legendre et autres grands mathématiciens, c'est tout à la fin du 19ème siècle que le français Jacques Hadamard et le belge Charles de la Vallée Poussin démontrèrent indépendamment le résultat majeur du domaine : parmi les nombres de 1 à N, quand N est grand il y a "environ" $N/\log(N)$ nombres premiers. (Penser à $\log(N)$ comme une quantité qui croît comme le nombre de chiffres de N.) Les nombres premiers se raréfient donc lentement au fur et à mesure que l'on compte.

Améliorer ce résultat est un formidable défi, culminant avec la légendaire hypothèse de Riemann, le problème mathématique le plus célèbre au monde, mystérieusement lié à des énigmes de la physique quantique, et valant bien plus que le million de dollars offert pour sa récompense.

Si l'hypothèse de Riemann est un peu trop technique pour être exposée ici, ce n'est pas le cas de sa cousine, la conjecture de Goldbach : tout nombre pair $N > 2$ serait somme de deux nombres premiers ($46 = 41 + 5$, $78 = 71 + 7$, etc.) D'apparence simple, ce problème rebelle a fasciné maints mathématiciens amateurs rêvant de réussir là où les plus grands ont échoué; il a inspiré le roman à succès de Denis Guedj, *Le Théorème du perroquet.*

Une petite sœur de la conjecture de Goldbach postule que tout nombre impair est somme d'au plus 3 nombres premiers ($35 = 3 + 13 + 19$, etc.). On sait grâce à Vinogradov, Liu, Wang... que c'est vrai pour tous les nombres plus grands que 10^{1347} — mais ce nombre est si grand que la vérification systématique des cas restants est pour toujours hors d'atteinte, fût-ce avec tous les ordinateurs que la Terre produira jamais. Pour l'instant, nos merveilleux engins calculateurs n'ont pu vérifier la conjecture "que" jusqu'à 10^{22} (1 suivi de 22 zéros... dans toute autre science, cette surabondance d'indices vaudrait preuve, mais pas en mathématique !)

C'est en combinant vérification informatique et analyse mathématique que Tao, dans une démonstration virtuose et très moderne, réalise un pas vers la fameuse conjecture... qui nous narguera combien de temps encore ?

Cédric Villani, Professeur de l'Université de Lyon, Directeur de l'Institut Henri Poincaré (CNRS/UPMC)
— Carte blanche du supplément *Sciences & Technologie* du Monde, 25 mai 2012