Nash et les équations aux dérivées partielles

par
Cédric Villani
Université de Lyon & Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F-75231 Paris Cedex 05
France
villani@math.univ-lyon1.fr

Un jour de mai 2015, à l'Université d'Oslo, je pris la parole devant un amphithéâtre plein, pour donner le coup d'envoi d'une séance très spéciale. Le public retint son souffle quand le premier orateur, John Forbes Nash, âgé de 86 ans, descendit sur scène et commença son exposé avec une voix légèrement tremblante. Au premier rang se tenait Louis Nirenberg : les deux vétérans se connaissaient depuis soixante ans et venaient tout juste d'être honorés conjointement du Prix Abel, la récompense la plus prestigieuse qu'un mathématicien puisse espérer. Sur le vaste bureau, on pouvait voir une espèce de bouée toute ridée, engendrée par une imprimante 3d : la réalisation d'un tore plongé de Nash–Kuiper, due au projet français Hévéa [H]. L'étrange surface avait été placée là pour illustrer l'exposé qui serait donné, dans la foulée, par Camillo De Lellis, représentant de la jeune garde qui a repris et approfondi les travaux de Nash sur le plongement isométrique.

L'exposé de Nash était bref et concernait l'un de ses amours de jeunesse, la relativité générale : c'est ainsi qu'il évoqua une équation qu'il avait proposée à Einstein (!) pour servir de nouvelle base à la célèbre théorie. Avec un autre orateur, le sujet aurait probablement suscité des sourires incrédules – mais pas avec Nash. Il avait déjà démontré de façon si éclatante son originalité et sa profondeur de pensée, que l'on se disait "Après tout, il a peut-être raison ?"

C'était la quatrième fois que je rencontrais Nash : la première fois à Princeton, j'avais été si intimidé que je n'avais pas osé lui adresser la parole ; mais la seconde fois, toujours à Princeton, j'avais pu avoir une conversation avec lui, et je lui avais parlé des travaux de De Lellis et Székelyhidi, l'un des prolongements modernes les plus marquants de son œuvre sur les plongements peu lisses. La troisième fois, à New York, j'avais discuté avec lui, lors d'un débat public, sur le thème du style mathématique, et lui avais offert mon ouvrage "Théorème vivant" ; c'est avec un plaisir évident qu'il avait pris connaissance du chapitre qui lui était consacré. Nirenberg aussi était venu assister au débat de New York, et cet événement d'Oslo semblait donc se placer dans le droit fil de notre précédente rencontre.

Mais cette quatrième fois devait être la dernière : trois jours plus tard, alors qu'ils rentraient d'Oslo, John Nash et son épouse Alicia décédaient d'un accident de la route, dans le taxi qui les ramenait chez eux à Princeton. Cet épisode tragique venait s'ajouter à la liste des événements inouïs survenus à Nash : une carrière mathématique aussi brève que révolutionnaire, ne s'inscrivant dans aucune école, qui avait surpris les meilleurs spécialistes sur leur propre terrain ; un Prix Nobel d'économie obtenu sur le tard, pour sa thèse, après avoir guéri d'une maladie réputée incurable ; un Prix Abel qu'il avait accueilli, m'a-t-on dit, avec une joie immense, et qu'il reste le seul à avoir cumulé avec le Nobel. Un destin singulier, *out of this world*, qui avait valu à Nash de devenir une icône du génie humain, et d'être le sujet d'un film hollywoodien multi-oscarisé bien que fort mauvais (un jugement qui exprime mon propre sentiment, mais aussi celui de Nash lui-même et de bien des collègues).

À travers ce texte j'évoquerai les travaux de Nash dans l'analyse des équations aux dérivées partielles, qui lui ont valu ce Prix Abel 2015. Je me concentrerai sur trois résultats particulièrement marquants : le théorème de plongement peu lisse [Na2], le théorème de plongement lisse [Na3], et le théorème de régularité des équations de diffusion sous forme divergence [Na4]. Pour ce qui est de ses autres contributions géométriques, je passerai sous silence ses travaux sur les variétés analytiques réelles [Na1], qui ont aussi été reconnus comme importants et inspirants, mais ne relèvent pas vraiment des équations aux dérivées partielles ; et je ne serai pas plus bavard sur son théorème de plongement analytique [Na5], que l'on peut considérer comme un raffinement du théorème de plongement lisse. Je ne donnerai que peu de références, me limitant à quelques articles fondateurs et à quelques textes d'exposition ; mais on pourra aisément reconstituer la bibliographie manquante. La Section 3 est traduite d'une contribution aux Notices de l'American Mathematical Society.

Je remercie Yann Brenier pour m'avoir, le premier, suggéré de lire Nash dans le texte, au cours de mes années de thèse ; et Rich Bass, Vincent Borrelli, Camillo De Lellis, Misha Gromov, Dan Stroock, László Székelyhidi, pour les discussions que nous avons eues sur ces sujets. Merci également aux élèves de l'École normale supérieure de Lyon avec lesquels j'ai, dans le temps, décortiqué les articles de plongement peu lisse ; et à Martin Andler pour m'avoir un jour recruté pour un exposé consacré à Nash dans le cycle *Un texte, un mathématicien* de la Société mathématique de France (à la Bibliothèque nationale de France) ; depuis lors j'ai donné à de multiples reprises des conférences publiques sur l'œuvre de Nash,

toujours avec la même émotion.

1 Théorème de plongement peu lisse (1954)

L'intérêt de Nash pour les théorèmes de plongement commença, dit-on, par un défi exaspéré. Warren Ambrose, son collègue du MIT, avait été si agacé par sa morgue qu'il lui avait jeté avec ironie "Si tu es si bon, pourquoi ne résous-tu pas le problème de plongement isométrique ?"

De fait, la tâche était énorme. Dans son programme de 1854, Bernhard Riemann avait renversé l'ordre naturel de la géométrie, et suggéré la définition de variété abstraite, faite de "petits bouts d'espace euclidien déformés et recollés". Cette notion était a priori bien plus générale que celle de sous-variété d'un espace euclidien ; mais à bien y réfléchir, l'était-elle vraiment ?

Le problème du plongement isométrique, c'était cela : étant donné une variété riemannienne abstraite, peut-on la plonger isométriquement dans un espace euclidien suffisamment grand ? Si c'était vrai, alors il y aurait équivalence des deux approches naturelles de la géométrie non euclidienne : géométrie plongée, et géométrie intrinsèque. Cette question n'avait pas d'application évidente (il y a, de toute façon, tant d'avantages à travailler intrinsèquement !), mais elle était rien moins que fondamentale.

Combien de dimensions devrait avoir l'espace de plongement $\mathbb{R}^N$? Pour un espace géométrique de dimension n, les équations de plongement isométriques se ramènent à un système de $n(n+1)/2$ équations aux dérivées partielles du premier ordre, correspondant aux $n(n+1)/2$ fonctions g_{ij} que constituent les composantes du tenseur métrique. Il est donc naturel de chercher à tout le moins $N \geq n(n+1)/2$. En fait, le théorème de Janet–Cartan (une application fort astucieuse du théorème de Cauchy–Kowaleveskaya) dit qu'en classe analytique, $N = n(n+1)/2$ est localement admissible, et en général optimal. Mais en classe C^∞, cela n'avait rien d'évident.

Nash ne connaissait pas le problème du plongement avant qu'Ambrose ne lui en parle, mais il fut piqué au vif, et cette histoire démontre le pouvoir de l'amour-propre. Nash comprit que le problème était, a priori, très difficile ; mais il vit aussi qu'il arriverait à le résoudre s'il cherchait des plongements *peu lisses*. Voici une amélioration du résultat qu'il démontra en 1954 :

Théorème 1 (Théorème de plongement peu lisse de Nash–Kuiper)**.** *Si une variété riemannienne lisse M se plonge de manière C^1 dans $\mathbb{R}^N$, avec $N > \dim(M)$, alors elle se plonge isométriquement de manière C^1 dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$.*

Notons tout de suite que
(a) la condition de dimension est étonnamment faible : on s'attendait à $N \geq n(n+1)/2$, et en fait il suffit ici d'avoir $N \geq n+1$!
(b) on peut généraliser à des plongements de M dans une variété M' ;
(c) la preuve du théorème est tout à fait constructive, et d'ailleurs certains plongements de Nash–Kuiper (dans des versions améliorées sur des cas précis) ont été, récemment, représentés par des images informatiques très précises [BJLT, H] ou par des sculptures ; on les a alors appelés des "fractales lisses", car ils combinent l'aspect auto-similaire des fractales avec la propriété de plan tangent qui est inhabituelle dans le monde irrégulier des fractales ;
(d) on peut transformer la conclusion en : "se plonge isométriquement dans une boule arbitrairement petite (!) de $\mathbb{R}^N$" ;
(e) il existe des théorèmes généraux (théorèmes de Whitney) permettant de plonger M dans un $\mathbb{R}^N$ assez grand ; ainsi l'on trouvera toujours un N convenable ; mais la formulation du Théorème 1 est à la fois plus puissante (il se peut que N soit bien plus petit que la dimension proposée par Whitney), et plus proche de la stratégie de Nash, puisque tout son travail consiste à *déformer* un plongement non isométrique en un plongement isométrique.
En particulier, Nash montre que les seules obstructions éventuelles au plongement C^1 dans $\mathbb{R}^N$ sont de nature topologique, et non métrique : on parlera plus tard de h-principe pour qualifier cet état de fait.
Le Théorème 1 a été démontré par Nikolaas Kuiper [K] peu après Nash ; ce dernier avait obtenu un résultat similaire pour $N > \dim(M) + 1$. Pour Nash, ce raffinement sur la (co)dimension n'était sans doute pas crucial, mais c'est dans la version de Kuiper que les paradoxes troublants apparaissent. Prenons par exemple un tore plat de dimension 2, $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Il est clairement déformable en un tore de révolution (un *donut*, comme on a coutume de l'appeler), lequel se plonge dans $\mathbb{R}^3$. En appliquant Nash–Kuiper, on peut donc construire un tore plat plongé *isométriquement* dans $\mathbb{R}^3$... une aberration !
Pourquoi est-ce une aberration ? Essayez donc de plonger un tore plat dans $\mathbb{R}^3$: prenez une bande rectangulaire de papier, recollez deux côtés opposés, et efforcez-vous de recoller les deux autres côtés opposés... après cet échec, raisonnez un peu. Supposons que vous parveniez à plonger le tore plat ; emprisonnez-le dans une sphère, et poussez doucement le tore jusqu'à ce qu'il touche la sphère par l'intérieur ; en un point de contact, la courbure du tore est forcément supérieure ou égale à celle de la sphère... mais le tore est de courbure nulle, et la sphère de courbure strictement positive ! Le plongement du tore plat semble donc tout à fait impossible, en contradiction avec le théorème de Nash–Kuiper. Où est la faute ? Simplement dans le fait que si le plongement est supposé de classe C^1, il

ne préserve pas forcément la courbure, et le célèbre Théorème de Gauss (valable en régularité C^2) ne s'applique pas ; impossible alors de comparer les courbures.
Troublant également : prenez une sphère de rayon 1, et plongez-la isométriquement dans une boule ouverte de rayon $r = 10^{-3}$. Un argument similaire au précédent suggère que la courbure de la sphère ainsi plongée est au moins égale à la courbure K de la sphère de rayon r, soit $K = 10^6$. Mais la sphère de rayon 1 a une courbure égale à 1, cela semble donc impossible ! En outre on "sait" que la sphère admet un unique plongement isométrique (à isométrie de $\mathbb{R}^3$ près) : c'est le plus ancien théorème de rigidité, dû à Liebmann... on "sait" aussi qu'il en est de même pour toute surface fermée de courbure strictement positive : c'est le théorème de rigidité de Cohn-Vossen (qui prouve l'unicité du plongement ; l'existence est due à Pogorelov et Nirenberg). Mais tous ces théorèmes demandent une certaine régularité !
En basse régularité, la courbure n'est donc pas une contrainte sur le plongement. Il n'empêche : avant Nash, on n'imaginait pas que l'on puisse construire de tels plongements *continûment différentiables* – de vraies solutions, tout ce qu'il y a de plus classiques, de l'équation de plongement isométrique. Et Nash le fit ! Comme l'a dit Misha Gromov, c'était impossible et pourtant c'était vrai ; et c'était un incroyable changement de point de vue, où l'on se laissait aller à "prendre les variétés à mains nues", et à les bricoler.
Pour ce bricolage, Nash commence par diminuer strictement les distances ; l'idée étant de gagner de la marge pour les allonger ensuite à volonté. Soit Φ_0 ce plongement qui contracte les distances ; Nash va construire un plongement isométrique Φ en déformant Φ_0, par couches successives ; et il va le construire *tout près* (arbitrairement près, en topologie uniforme) de Φ_0.
Pour prendre une analogie mono-dimensionnelle : prenez une longue ficelle L, et contractez-la en une courte ficelle L' ; pour regagner toute la longueur que vous avez perdue, au lieu d'étirer la ficelle L' à nouveau, vous allez enrouler une fine bobine, un tortillon, autour de L'. Le tortillon ainsi construit pourra être aussi long que L (si les mailles sont assez serrées) et en même temps tout proche de L' (si les mailles sont de faible ampleur). Formulé ainsi, cela n'est guère impressionnant... cela le devient plus si l'on se rend compte que l'on a ainsi *une façon d'augmenter arbitrairement les distances, dans une direction bien déterminée, par des perturbations d'ampleur arbitrairement petite*.
La construction de Nash itère une version à paramètre de cette brique élémentaire. Pour tout x, on note O_x l'espace des applications tangentes isométriques entre T_xM et $\mathbb{R}^N$; le but est de construire un plongement Φ tel que $d_x\Phi \in O_x$ pour tout x. Comme on l'a dit, on commence par plonger notre variété M (de manière non isométrique) dans un $\mathbb{R}^N$, puis à la rétrécir jusqu'à ce que le plongement ainsi

obtenu, Φ_0, diminue toutes les distances ; autrement dit, qu'il soit une contraction. Pour tout x, $d_x\Phi_0$ appartient ainsi à l'intérieur C_x de l'enveloppe convexe de O_x. On superpose alors à Φ_0 une petite ondulation, bien choisie, localisée, de sorte que le résultat Φ_1 soit, dans un ouvert assez petit, moins contractant que Φ_0, mais reste partout une contraction. On continue ensuite à faire osciller, morceau par morceau, direction par direction, selon des tortillons qui sont de plus en plus enroulés autour de leur axe, avec des mailles de plus en plus serrées. Et c'est ainsi que l'on construit par itération une suite (Φ_k) de contractions telle que, pour tout x, $d_x\Phi_k$ s'approche du bord de C_x *par l'intérieur*.

Le reste, c'est de l'analyse ! On prépare, on quantifie, on estime, on fait converger les séries de fonctions... on montre que la limite de Φ_k est bien définie, et que c'est un plongement de classe C^1.

La méthode ainsi inaugurée par Nash fut rendue plus abstraite et systématique par Gromov, qui en fit la théorie de l'*intégration convexe* [Gr1], et s'intéressa plus généralement à la résolution d'inclusions différentielles : l'équation de plongement isométrique peut en effet se reformuler comme une relation d'inclusion,

$$\forall x \in M, \qquad d_x\Phi \in O_x,$$

où le membre de gauche de la relation $d_x\Phi \in O_x$ est une fonction linéaire de l'inconnue Φ, et le membre de droite est inclus dans le bord d'un ensemble convexe. Aujourd'hui la technique d'intégration convexe est, avec la théorie de catégorie de Baire (popularisée dans ce contexte par Dacorogna et Marcellini), l'une des deux principales méthodes de résolution des inclusions différentielles.

Comme on l'a dit, la méthode de Nash est constructive, et permet d'affiner la régularité du plongement : ce dernier peut être choisi de classe $C^{1,\alpha}$ pour $0 < \alpha < \alpha_*$. C'est en fait un problème ouvert, encore aujourd'hui, que de savoir quel est l'exposant critique α_* : pour le plongement d'une sphère dans $\mathbb{R}^3$, on sait qu'il est compris entre $1/7$ et $2/3$; peut-être égal à $1/2$? Ce phénomène de régularité critique, discuté dans Conti, De Lellis et Székelyhidi [CDLS], a de quoi faire réfléchir : après les plongements étranges de Nash, on aurait pu penser que la raison principale de la rigidité, c'est la courbure (en accord avec le théorème de Cohn–Vossen), et partant la topologie C^2 qui vient naturellement avec ; mais la réalité est plus subtile puisque l'on a rigidité pour une régularité strictement plus faible que C^2.

Du côté de la physique mathématique, des problèmes de ce style, couplant un système d'équations linéaires et une relation constitutive non linéaire, ont été explorés par Tartar [T] ; se pose en général la question de savoir dans quelles directions on peut faire "osciller" le système, et l'analyse peut devenir fort subtile.

Les points de vue de Gromov et Tartar furent synthétisés et développés par Kirchheim, Müller, Šverak [KMS] et d'autres ; la théorie aboutit à des contre-exemples frappants et paradoxaux, ainsi qu'à de belles avancées dans la compréhension de certains phénomènes de microstructures.

Mais le plus étonnant coup de théâtre se produisit, un demi-siècle après Nash, quand De Lellis et Székelyhidi [DLSz] découvrirent que l'on peut appliquer la technique de l'intégration convexe aux équations d'Euler incompressible, ainsi qu'à certains autres modèles de mécanique des fluides. Ils construisirent des solutions distributionnelles de l'équation d'Euler incompressible, respectables en tout point, sauf que leur énergie pouvait croître et décroître quasiment à volonté... Ils retrouvaient ainsi des solutions anormales construites par Scheffer et Shnirelman, mais avec beaucoup plus de clarté, de flexibilité et de contrôle. Et ils mirent au jour des horreurs encore pires : on peut imposer, par exemple, que le champ de vitesses soit rigoureusement nul pour tous les temps t et toutes les positions x, sauf précisément quand $t \in [1/2, 1]$ et $|x| \leq 1$, et on peut imposer qu'alors le module de la vitesse soit toujours égal à 1 ! Imaginez le fluide qui part du repos parfait, puis s'agite avec une vitesse normalisée dans un espace spontanément confiné, et repasse ensuite subitement au repos parfait...

Mais au delà des curiosités, se reposait une problématique de régularité critique, similaire à celle que l'on a évoquée pour le plongement ; et c'est ainsi que revint sur le tapis, de manière inattendue, une célèbre conjecture d'Onsager sur la régularité critique des équations d'Euler – d'après lui, 1/3 de dérivée. On savait depuis Constantin–E–Titi que toute solution ayant plus d'1/3 de dérivée, en un certain sens, vérifie la préservation de l'énergie ; mais on n'avait aucune piste pour aborder le problème dans l'autre sens, par la régularité basse. La réinterprétation de l'équation d'Euler sous forme d'inclusion différentielle apportait un regard nouveau sur ce vieux problème, et le premier début de réponse à cette question, en fournissant des solutions de classe C^α d'énergie variable !

En 2008 je présentais ces avancées au Séminaire Bourbaki [V1] ; ce n'était que le coup d'envoi d'un programme développé ensuite, très activement, par De Lellis, Székelyhidi, Buckmaster, Isett, Vicol..., et qui a abouti à la construction de solutions paradoxales dont la régularité, modulo une moyenne en temps, est arbitrairement proche de la régularité Hölder-1/3 conjecturée par Onsager ! Et en même temps, c'était un héritage de la méthode de Nash, comme cela est bien expliqué dans les notes de Székelyhidi [Sz].

2 Théorème de plongement lisse (1956)

Le théorème de plongement peu lisse apportait une surprise de taille, mais ce n'était cependant pas la réponse à la question initialement posée, qui concernait des plongements lisses. Et c'est en 1956, plus de cent ans après Riemann, que Nash put enfin apporter la réponse attendue.

Théorème 2 (Théorème de plongement lisse de Nash)**.** *Soit M une variété lisse, complète, de dimension n. Alors il existe N, dépendant uniquement de n, tel que M se plonge isométriquement dans $\mathbb{R}^N$.*

La preuve de Nash était longue et atrocement compliquée ; elle aurait été impubliable sans le travail héroïque accompli par Herbert Federer pour en améliorer la forme. Nash lui-même était incapable de l'expliquer de manière convaincante, ni d'ailleurs d'expliquer comment il l'avait découverte ou quelles en étaient les idées clés. En fait, si l'on en croit les témoins de l'époque, personne (sauf peut-être Federer) n'avait compris la preuve ; la plus grande confusion régnait chaque fois que quelqu'un se mêlait de l'expliquer ; et personne n'y aurait cru, sans doute, si Federer n'avait pas effectué un travail de vérification si soigneux. Et à vrai dire, la preuve n'était même pas tout à fait juste, car Nash lui-même annonça, bien des années plus tard, que son traitement des variétés non compactes était erroné...
Mais peu importe !
D'une part, certains des meilleurs analystes de l'époque allaient se mettre en devoir d'extraire du travail de Nash les idées-clés, et de la transformer en une méthode générale de résolution perturbative des équations aux dérivées partielles "avec perte de dérivées". Le premier fut Jacob Schwartz – un mathématicien aux intérêts incroyablement variés, dont on se souvient en particulier pour un fameux traité d'analyse, le "Dunford–Schwartz". Mais c'est à Jürgen Moser que revint l'honneur de tirer de l'article de Nash une version souple et utilisable du théorème des fonctions implicites, dit de Nash–Moser, qui reste l'outil perturbatif général le plus puissant dont nous disposons. Après Schwartz et Moser viendraient Hörmander, Hamilton, Klainerman, Alinhac–Gérard, X. Saint-Raymond, Neuberger, Ekeland (excusez du peu), chacun proposant sa réécriture du théorème, avec des hypothèses et des conclusions variant d'un travail à l'autre, mais similaires dans l'esprit.
D'autre part, Gromov [Gr2] a réécrit et optimisé le théorème de plongement lisse, faisant diminuer la dimension N jusqu'à une valeur qui n'est pas si loin de la valeur optimale attendue (du moins, avec le bon comportement en $O(n^2/2)$ quand $n \to \infty$).
Enfin, Günther [G] proposa à la fin des années 80 une nouvelle méthode de démonstration du Théorème 2 — plus courte, plus simple, basée sur des outils des années 1930, et donnant des estimations encore meilleures sur la valeur de N. On pourra se reporter à Alinhac–Gérard [AG] ou à Yang [Y] pour des exposés simples de cette méthode de Günther, sans recherche d'optimisation de N en gé-

néral... Notons à ce sujet que la valeur optimale de N n'est toujours pas connue ; et qu'il existe quantité de problèmes *élémentaires* sur les plongements isométriques en basse dimension, qui ne sont toujours pas résolus : par exemple, est-il vrai que toute surface lisse se plonge localement (de manière lisse) dans $\mathbb{R}^3$?

Autrement dit, selon un phénomène que l'on connaît bien, la théorie a pris sa vie propre, bien au-delà de l'application pour laquelle elle a été conçue, et pour laquelle elle est même devenue probablement inutile. Et si l'on pousse le raisonnement jusqu'au bout, il est heureux que Nash n'ait pas vu la solution simple de Günther, car sa solution si compliquée était en un sens bien plus riche en ce qu'elle fournissait une méthode générale. Nash avait conscience de ce caractère fondateur : il insiste, dans l'introduction de l'un de ses articles, sur l'importance du défrichage de nouvelles méthodes avec leur intérêt propre.

Je laisserai là le plongement isométrique, et renvoie au riche texte de synthèse et de prospective de Gromov [Gr2] pour une discussion détaillée de résultats disponibles en la matière, et de très nombreux problèmes ouverts.

Après ces explications, je donnerai quelques indications sur la méthode dite "de Nash–Moser". Dans tous les cas il s'agit de résoudre une équation implicite de la forme $\Psi(u) = f$, près d'une solution particulière $\Psi(u_0) = f_0$, sous l'hypothèse que Ψ, $D\Psi$, $D^2\Psi$ et $(D\Psi)^{-1}$ sont continues modulo une possible "perte finie de dérivées". Plutôt que de chercher à donner des définitions générales, considérons à titre d'exemple le cas particulier de l'équation de plongement isométrique, que nous allons réécrire comme un problème de résolution d'équation aux dérivées partielles.

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n, avec sa métrique g : localement M est définie par des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$; et on note g_{ij} les composantes de la métrique. Soit Φ un plongement de M dans $\mathbb{R}^N$: dire que Φ est isométrique, cela revient à

$$\forall i, j, \quad \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \right\rangle_E = \sum_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x^j} = g_{ij}, \tag{1}$$

où l'on note par $\langle a, b \rangle_E = a \cdot b$ le produit scalaire euclidien pour insister sur le fait que c'est là qu'est la structure métrique euclidienne.

Admettons que l'on dispose d'une solution particulière, disons g^0 avec son plongement Φ^0, et essayons de résoudre l'équation au voisinage de cette solution particulière (c'est une démarche de type "fonctions implicites"). On cherche donc à plonger une métrique $g \simeq g^0$ par $\Phi \simeq \Phi^0$. L'équation (1) étant quadratique, on peut écrire le linéarisé sous la forme

$$L_0 \psi = \left(\frac{\partial \Phi^0}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x^j} + \frac{\partial \Phi^0}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \right)_{ij}. \tag{2}$$

(À une application de M dans $\mathbb{R}^N$ l'opérateur L_0 associe un tenseur, ou simplement, dans ce jeu de coordonnées, une application de M dans l'espace des matrices $n \times n$.) Quant à la partie non linéaire, ce sera

$$Q_0(\psi) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \right)_{ij}. \tag{3}$$

Nash suggéra de réécrire le linéarisé sous la forme

$$L_0 \psi = \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial \Phi^0}{\partial x^i} \cdot \psi \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Phi^0}{\partial x^j} \cdot \psi \right) - 2 \, \frac{\partial^2 \Phi^0}{\partial x^i \, \partial x^j} \cdot \psi$$

et d'imposer la *contrainte supplémentaire* $\partial_i \Phi^0 \cdot \psi = 0$, pour tout i. Ainsi étendu, le système linéarisé devient

$$\begin{cases} -2 \, \dfrac{\partial^2 \Phi^0}{\partial x^i \, \partial x^j} \cdot \psi = g - g^0 \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi^0}{\partial x^i} \cdot \psi = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Se lier les mains avec une contrainte supplémentaire peut sembler étrange, mais cela permettra de réintroduire de l'inversibilité dans un système sous-déterminé. Et de fait, si les $n(n+1)/2 + n$ vecteurs $\partial^2_{ij} \Phi^0$ et $\partial_i \Phi^0$ sont libres dans $\mathbb{R}^N$ on peut résoudre (4) sans perdre aucune régularité.

Cependant on doit déchanter quand on passe à la résolution non linéaire : l'équation $L_0 \psi + Q_0(\psi) = g - g_0$ deviendra $\psi = L_0^{-1}(g - g_0) - L_0^{-1} Q_0(\psi)$; comme Q_0 est un opérateur d'ordre 1, et que L_0^{-1} est un opérateur d'ordre 0, il est impossible de "faire boucler" un théorème de point fixe dans un espace raisonnable : le membre de droite fait toujours intervenir un cran de régularité de plus que le membre de gauche, et l'on parle donc de "perte d'une dérivée". En outre, si l'on met en place un système itératif pour résoudre l'équation, la régularité de la solution approchée g_0 interviendra dans l'opérateur L_0, et la perte de régularité deviendra encore pire...

Pour résoudre ce problème, on va

- travailler avec une *échelle* de régularité X^r plutôt qu'avec une régularité fixée ; par exemple on considèrera l'échelle des espaces de Hölder C^r, ou celle des espaces de Sobolev H^r ; ou plus généralement une famille d'espaces de Banach emboîtés et en interpolation ;
- introduire une famille d'opérateurs de régularisation : par exemple la troncature T_K, qui coupe les fréquences plus élevées qu'un niveau K, où K pourra varier au cours de la preuve.

Ce qui compte alors c'est de savoir (a) quelle est la norme $X^r \to X^{r'}$ de l'opérateur de régularisation T_K ? (typiquement $O(K^{r'-r})$), et (b) étant donnée une

fonction régulière u, disons de classe $X^{r'}$, quelle est la qualité de l'approximation de u par $T_K u$ en norme plus basse X^r ? (typiquement $O(1/K^{r'-r})$).
L'idée maîtresse de Nash–Moser est de construire une solution en combinant (i) un schéma d'approximation de Newton avec (ii) une régularisation *d'amplitude variable* : on régularise les incréments du schéma de manière de plus en plus légère (c'est à dire à un niveau de plus en plus élevé) à mesure que le schéma se déroule. Comme la taille des incréments diminue de manière extrêmement rapide, on peut se permettre d'avoir de très grandes constantes de régularisation, et donc de maintenir le gain de régularité (le nombre de dérivées que l'on regagne, par exemple) fixé, tout en relâchant la régularisation (en laissant le seuil K augmenter). On remplacera donc le schéma de Newton habituel

$$v_{n+1} = v_n - D\Psi(v_n)^{-1}\Psi(v_n),$$

par une variante régularisée, telle que

$$v_{n+1} = v_n - T_n \left[D\Psi(v_n)^{-1}\Psi(v_n)\right], \tag{5}$$

où $T_n = T_{K_n}$, et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini rapidement ; le but est alors de montrer la convergence de v_n dans un espace de régularité assez élevé, en utilisant les propriétés de l'approximation.
Ici encore... c'est de l'analyse ! La méthode, relativement économe, de Xavier Saint-Raymond, consiste à trouver d'abord une borne très lâche sur v_n dans une norme élevée, disons d'indice $s+q$, puis à chercher simultanément une borne plus précise sur $\Psi(v_n)$, disons en norme s, et une borne un peu plus lâche sur l'incrément $v_{n+1} - v_n$, disons en norme $s+p$ (les paramètres s, p, q étant à choisir convenablement). Du fait de la perte de régularité, l'opérateur qui intervient naturellement est non borné ; la régularisation en fait un opérateur borné, mais avec une constante qui est de plus en plus grande à mesure que la régularisation est de plus en plus légère ; cependant ces grandes constantes sont tuées par les constantes minuscules qui traduisent le caractère ultra-rapide de la convergence du schéma de Newton. On retrouve ici certaines idées développées par Kolmogorov, Arnold et (encore !) Moser dans le cadre de la théorie KAM.
Le schéma ci-dessus admet de nombreuses variantes : il y a plusieurs façons de choisir l'itération (quelle dose d'implicite, d'explicite ?), la régularisation (prend-on la non-linéarité de la régularisation, la régularisation de la non-linéarité, ou encore une autre combinaison ?), la méthode de Newton (discrète comme Moser, continue comme Nash ?), le formalisme, etc. Certains auteurs cherchent à optimiser la perte de régularité, d'autres ne veulent pas trop perdre sur les normes... impossible de dire quel est "le meilleur" énoncé, et cela dépendrait en fait des

détails du sujet. Mais cette méthode s'applique en pratique à tout problème aux dérivées partielles raisonnable !

Pour résumer : Après une période de perplexité, la communauté a digéré les méthodes de Nash, et l'analyse perturbative a été durablement transformée par le coup de théâtre de Nash. La théorie de Nash–Moser allait trouver de nombreuses applications en géométrie, théorie des systèmes dynamiques, mécanique des fluides, équations des ondes, théorie des flots géométriques comme le flot de Ricci, physique mathématique en général... et, comme le théorème de plongement peu lisse, donnait finalement naissance à un nouveau chapitre de l'analyse.

Notons enfin que, à l'instar du théorème de plongement de Nash, la plupart des applications célèbres de la méthode de Nash–Moser ont été à la longue réécrites sans cette méthode ! L'exception la plus notable semble être la version générale lisse du théorème KAM (et encore, on peut argumenter que dans les applications concrètes de cette théorie, il est acceptable de travailler en régularité analytique, ce qui peut se faire par la méthode plus simple de Kolmogorov). Cela ne diminue pas l'importance de la théorie de Nash–Moser, qui s'affirme bien telle qu'elle doit être perçue : un outil surpuissant que l'on peut utiliser en grande généralité, ou pour défricher un problème complexe dont on n'a pas encore bien compris la logique particulière.

3 Équations diffusives sous forme divergence (1958)

À l'automne 1958, l'*American Journal of Mathematics* publiait ce qui est peut-être, à ce jour, le plus célèbre article de sa longue histoire : *Continuity of solutions of elliptic and parabolic equations* [Na4], par John Nash. Seulement 24 pages : c'était un article bien court quand on le compare aux travaux contemporains sur les équations aux dérivées partielles ; mais il contenait la solution d'un problème ouvert d'importance majeure, et fut immédiatement considéré par les experts (Carleson, Nirenberg, Hörmander, pour n'en nommer que quelques-uns) comme un accomplissement extraordinaire. Nirenberg n'hésita pas a utiliser le mot "génie" pour décrire cet article ; pour ma part, je mentionnerai que je me souviens très bien de l'émotion et de l'émerveillement que j'ai ressentis en l'étudiant, près de 40 ans après sa genèse.

Voici une forme du résultat principal de Nash :

Théorème 3. *Soit $a_{ij} = a_{ij}(x,t)$ une matrice symétrique positive $n \times n$, dépendant de $x \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Supposons que (a_{ij}) est uniformément elliptique, soit*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \lambda\,|\xi|^2 \leq \sum_{ij} a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j \leq \Lambda\,|\xi|^2, \tag{6}$$

où λ, Λ sont des constantes strictement positives. Soit $f = f(x,t) \geq 0$ une solution de l'équation parabolique linéaire, sous forme divergence,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$. Alors f est automatiquement continue, et même de classe C^α (régularité hölderienne) quand $t > 0$, pour un certain exposant $\alpha > 0$. On peut expliciter cet exposant, de même qu'une borne sur la norme C^α, en termes de λ, Λ, t, n et la norme $L^1(dx)$ de f (qui est conservée au cours du temps).

Au sujet des hypothèses, les deux caractéristiques les plus importantes sont que
(a) *on ne fait aucune hypothèse de régularité*, de quelque forme que ce soit, sur la matrice de diffusion : les coefficients a_{ij} doivent juste être mesurables ; cela est en contraste avec la théorie classique de la régularité des équations paraboliques (théorie de Schauder), plus ancienne, qui demande au moins la régularité Hölder des coefficients ;
(b) L'équation (6) est sous forme divergence ; en fait, les équations sous forme non-divergence seraient plus tard l'objet d'une théorie différente inaugurée par Krylov et Safonov.
En revanche, la nature parabolique de l'équation n'est pas si contraignante : on peut aussi bien considérer les équations elliptiques comme un cas particulier stationnaire. Également, le théorème peut être localisé, et considéré dans le cadre géométrique d'une variété riemannienne.
L'absence d'hypothèse de régularité sur la matrice de diffusion permet d'utiliser ce théorème pour étudier certaines équations de diffusion non linéaires, avec une dépendance non linéaire entre la matrice de diffusion et la solution. Ainsi Nash espérait que ces nouvelles estimations seraient utiles en mécanique des fluides, un sujet qui le passionnait. Cependant, la première utilisation notable de ce théorème fut la solution du 19ème problème de Hilbert sur l'analyticité des minimiseurs de fonctionnelles à intégrande analytique. Pour être plus explicite, considérons un minimiseur $v \geq 0$ de la fonctionnelle $\int L(\nabla v(x))\, dx$, où l'intégrande L est analytique et uniformément convexe : est-ce que v sera automatiquement analytique ? Le calcul des variations classique montre que des solutions $C^{1,\alpha}$ sont automatiquement analytiques ; en appliquant l'estimation de Nash on pouvait montrer que ∇v était Hölder-continu, et ainsi compléter la preuve. En effet, si v est un minimiseur, alors pour tout indice k, la dérivée partielle $u = \partial_k v$ satisfait l'équation d'Euler–Lagrange $\sum_{ij} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) = 0$, avec $a_{ij} = \partial^2_{ij} L(\nabla v)$ (cela demande quelques manipulations habiles sur les dérivées mixtes), et cette équation est bien linéaire, sous forme divergence, et elliptique (via l'hypothèse d'uniforme

convexité de L). Notez que dans ce cas, on applique le théorème sans rien savoir de la régularité de a_{ij}, qui dépend directement de la fonction inconnue v.

Cependant, ce n'est pas seulement par son contenu, et par cette avancée sur le problème de Hilbert, que l'article de Nash allait entrer dans la postérité : il y avait aussi l'incroyable concours de circonstances et de passions humaines qui présidaient à sa naissance.

D'abord, bien qu'il fût, en la matière, un novice, un *outsider*, Nash était parvenu à résoudre en quelques mois un problème qui lui avait été soumis par Nirenberg. Sa preuve avait pris les spécialistes de court ; "dense" et "opaque" étaient les qualificatifs qui seraient employés par exemple par Olga Ladyzhenskaya, dans son célèbre ouvrage sur les équations paraboliques, pour décrire la contribution de Nash.

Puis on découvrit par accident qu'Ennio De Giorgi — une future icône, mais à l'époque un parfait inconnu — avait publié, juste auparavant, une solution alternative, sous la forme d'un article encore plus court [DG], écrit en italien dans une revue obscure (du moins en comparaison de l'AJM...). Pour les décennies à venir, la concomitance des solutions de Nash et De Giorgi serait considérée par tous les analystes comme l'exemple *par excellence* de découverte simultanée.

Quant à Nash, en un geste stupéfiant, il retira son article dès qu'il fut accepté par *Acta Mathematica*, où l'expert n'était autre que Hörmander ; et il le publia à l'AJM, dans un espoir infructueux de remporter le Prix Bôcher 1959... Et quelques mois plus tard, la santé de Nash allait se détériorer à un tel point que (entre autres conséquences beaucoup plus tragiques) sa carrière scientifique serait interrompue pour de longues années, lui laissant seulement quelques opportunités de contributions ultérieures. Pour toutes ces raisons, l'article de Nash est chargé d'une émotion que peu d'articles ont jamais atteint.

Pourtant, quand j'ai lu le récit détaillé que fit Sylvia Nasar de cet épisode [N, Chapitres 30–31], ou quand j'ai eu l'opportunité d'en discuter avec des témoins directs comme Nirenberg, ce qui m'a fasciné le plus était la genèse de l'article. (Comme j'aurais aimé que le film *Beautiful Mind* rende hommage à cette aventure vraiment inspirante, plutôt que de choisir d'oublier la science et de se concentrer sur la maladie avec tant de pathos...)

Pour arriver à ses fins, Nash n'a pas développé ses propres outils, mais il a plutôt *orchestré* les efforts fragmentés de ses brillants collègues analystes, combinant sa propre intuition avec les compétences des spécialistes. Un exemple typique est l'inégalité d'interpolation de Nash : pour toute fonction intégrable $f \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2\,dx \leq C(n) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x f|^2\,dx\right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx\right)^{2\theta}, \qquad \theta = \frac{2}{n+2}. \tag{7}$$

Comme Nash le mentionne bien dans le manuscrit, cette inégalité fut en fait démontrée, à sa demande, par Elias Stein ; mais c'est Nash qui comprit le rôle crucial qu'elle pouvait jouer dans la théorie de la régularité des processus de diffusion, et qui plus tard allait être exploré en grande généralité.

Un autre exemple est l'usage stupéfiant de l'entropie de Boltzmann, $S = -\int f \log f$, radicalement hors de son contexte. L'entropie avait gagné ses lettres de noblesse en tant que notion de désordre ou d'information, principalement en physique statistique ; mais elle n'avait certainement rien à voir avec un problème de régularité. Et pourtant, Nash l'utilisa brillamment pour mesurer l'étalement d'une distribution, et put relier cet étalement à la régularisation. Là encore, l'outil était emprunté à un autre : j'ai appris de Lennart Carleson que c'était lui qui avait initié Nash à la notion d'entropie. Et c'était le début d'une longue tradition d'utilisation de fonctionnelles intégrales non linéaires dans l'étude de bornes de régularité.

Il faut également rendre hommage au stye de Nash, informel, destiné à faire comprendre non seulement la preuve, mais aussi les idées qui la sous-tendent — indiquant les difficultés principales, remarquant que telle ou telle inégalité est "dynamique" ou "puissante".

Mais encore, c'est la construction de la preuve qui est une œuvre d'art. Nash utilise une intuition assez visuelle, inspirée par la physique : considérons la solution comme l'évolution d'une distribution de chaleur dans un milieu complètement inhomogène ; on se demandera à quelle vitesse la chaleur émise par une source ponctuelle initiale "contamine" son environnement ; puis comment ce déplacement de "sources de chaleur" implique la positivité stricte de la température ; puis à quel point cette positivité stricte implique un recouvrement partiel des contributions de sources de chaleur voisines ; et pourquoi cela implique ensuite de la continuité. Il met en place des tactiques subtiles pour établir des relations dynamiques entre des quantités qui "résument" la solution. Par exemple : Nash commence par montrer que la norme L^2 de la solution décroît instantanément et devient immédiatement contrôlée, et comment cela implique une borne uniforme (sur la température), et comment cela implique ensuite une borne inférieure sur l'entropie. Puis il montre que l'entropie va de pair avec l'étalement (une entropie élevée implique l'étalement, mais réciproquement l'étalement augmente l'entropie).

Ces idées ont eu beaucoup d'influence, et sont revenues récemment à la mode dans une version proche de celle de Nash, après avoir été quelque peu éclipsées, parmi les spécialistes de régularité elliptique, par la version de De Giorgi. Elles se sont invitées dans l'étude d'équations aux dérivées partielles variées : on peut les retrouver, par exemple, dans le bel article de Carlen et Loss [CL] sur les équations de Navier–Stokes incompressibles en dimension 2 ; dans les travaux de Kassman sur la régularité des processus de diffusion non locaux ; ou dans mes propres contributions sur la convergence et la régularisation de diffusions dégénérées [V2] (un Appendice explorait la possibilité de démontrer des théorèmes d'hypoellipticité à la Hörmander par des méthodes fonctionnelles à la Nash ; depuis ce problème a été exploré en bien plus grand détail par Golse, Imbert, Mouhot et Vasseur).

Pour revenir à la théorie de régularité de De Giorgi – Nash, de nombreux auteurs se chargèrent de la réécrire, de la simplifier et de la développer. Les deux contributeurs les plus importants furent Moser [M] et Aronson [A]. Moser introduisit une méthode souple et élémentaire, le schéma itératif de Moser, qui simplifie la preuve et évite l'usage explicite de l'entropie (l'entropie permet de considérer les normes L^p dans le régime $p \to 1$; une approche duale s'intéresse au régime $p \to \infty$ comme Moser.) Et Moser prouva ce que l'on peut appeler l'inégalité de Moser–Harnack : si $f \geq 0$ satisfait une équation elliptique sous forme divergence, alors elle vérifie une inégalité de la forme

$$\sup_{B(x,r)} f \leq C \inf_{B(x,2r)} f,$$

où C dépend seulement de r, n et les bornes d'ellipticité. Quant à Aronson, il établit une borne de type gaussien sur le noyau de la chaleur associé à l'équation : $p_t(x,y)$ est borné par au-dessus et par en-dessous par des fonctions de la forme

$$\frac{K}{t^{n/2}}\, e^{-B|x-y|^2/t}.$$

Ces trois estimations — la régularité Hölder, l'inégalité de Moser–Harnack, et les bornes gaussiennes — sont toutes connectées et en un certain sens équivalentes. On peut en trouver de belles expositions, de même que d'astucieuses réécritures, simplifications et améliorations, dans les écrits de Bass [Ba1, Chapter 7] [Ba2] et Fabes & Stroock [FS]. Elles furent aussi généralisées à des géométries non lisses. En fait, ces techniques ont rencontré un tel succès que certains éléments de preuve sont maintenant passés dans notre trousse à outils d'analystes, sans que nous en soyons toujours conscients !

Pour conclure cet aperçu, voici une brève esquisse de la preuve de la borne supérieure d'Aronson, selon la méthode de Fabes & Stroock, qui est basée sur la stratégie originelle de Nash. Par densité, faisons comme si f était régulière, de sorte que c'est bien une estimation a priori qu'il s'agit de prouver.

Au départ, fixons une valeur de $p \in (1, \infty)$, et considérons l'évolution temporelle de la puissance p de la solution : la forme divergence mène à une belle formule de dissipation :

$$\frac{d}{dt}\int f^q = -q(q-1)\int \langle a\nabla f, \nabla f\rangle\, f^{q-2} \leq -Kq(q-1)\int |\nabla f|^2\, f^{q-2}.$$

Par dérivation des fonctions composées, on en déduit

$$\frac{d}{dt}\int f^q \leq -4K\left(\frac{q-1}{q}\right)\int |\nabla f^{q/2}|^2.$$

L'inégalité de Nash (7) montre que l'intégrale au membre de droite contrôle une puissance *strictement* supérieure à 1 de l'intégrale du membre de gauche : plus précisément, si $q \geq 2$, on a

$$\frac{d}{dt}\int f^q \leq -K' \frac{\left(\int f^q\right)^{1+\beta}}{\int f^{q/2}},$$

pour un certain $\beta = \beta(n) > 0$ et $K' > 0$. Cela lie l'évolution de la norme L^q et celle de la norme $L^{q/2}$; d'où l'on déduit une borne pour $\|f(\cdot,t)\|_{L^q}$ en fonction de t et $\|f(\cdot,0)\|_{L^{q/2}}$, qui peut être rendue explicite. On itère cette borne un nombre arbitraire de fois : on obtient ainsi une estimation de $\|f\|_{L^p}$ quand $p \to \infty$, et finalement de $\|f\|_{L^\infty}$: en écrivant $f_0 = f(\cdot,0)$ on trouve

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{t^{n/4}}\|f_0\|_{L^2}.$$

En combinant cela avec l'inégalité duale

$$\|f\|_{L^2} \leq \frac{C}{t^{n/4}}\|f_0\|_{L^1},$$

que l'on aurait aussi pu démontrer par inégalité de Nash, on trouve

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{t^{n/2}}\|f_0\|_{L^1}.$$

Il s'agit de l'estimation L^∞ habituelle sur le noyau de la chaleur, optimale en temps petit ; mais démontrée de manière purement fonctionnelle, et pour des coefficients sans régularité.

Maintenant, recommençons l'analyse avec f remplacée par $f\,e^{-a\cdot x}$, pour un certain $a \in \mathbb{R}^n$. Des termes d'erreur s'invitent alors dans les équations différentielles, ce qui mène à

$$\frac{d}{dt}\|f\|_q \leq -\frac{K'}{q}\|f\|_q^{1+\beta q/2}\|f\|_{q/2}^{-\beta q/2} + \frac{|a|^2 q}{2\lambda}\|f\|_q.$$

On itère et on étudie ces inégalités différentielles ; on obtient finalement la même borne sur $f\,e^{-a\cdot x}$ que celle que nous avons eue sur f ; et après une optimisation simple, la borne gaussienne en découle.

On le voit : la méthode est élémentaire, mais elle se déroule harmonieusement, et elle est évidemment flexible. Que ce soit dans sa version originale ou dans ses réécritures modernes, la preuve de Nash est un petit joyau – ou un galet brillant, pour utiliser l'expression de Newton.

4 En guise de conclusion

Trois théorèmes inattendus ; trois preuves qui furent jugées impossibles ou incompréhensibles à leur parution, et qui furent par la suite radicalement généralisées ; trois articles, publiés avec des intervalles de deux ans, qui tous engendrèrent leur propre théorie et donnèrent du grain à moudre aux analystes pour des décennies... Si l'on s'autorise un peu d'emphase, on peut dire que la carrière météoritique de Nash dans la théorie des équations aux dérivées partielles ressemble à celle d'un prophète livrant aux simples mortels des vérités encryptées dont la portée le dépasse lui-même.

Bibliographie

[AG] S. Alinhac et P. Gérard. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash–Moser.* Savoirs Actuels, InterEditions, 1991.

[A] D.G. Aronson. Bounds on the fundamental solution of a parabolic equation. *Bull. Amer. Math. Soc. 73* (1967), 890–896.

[Ba1] R.F. Bass. *Diffusions and Elliptic Operators*. Springer-Verlag, 1998.

[Ba2] R.F. Bass. On Aronson's upper bounds for heat kernels. *Bull. London Math. Soc. 34*, 4 (2002), 415–419.

[BJLT] V. Borrelli, S. Jabrane, F. Lazarus et B. Thibert. Flat tori in three-dimensional space and convex integration. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA 109*, 19 (2012), 7218–7223.

[CL] E.A. Carlen et M. Loss. Optimal smoothing and decay estimates for viscously damped conservation laws, with applications to the 2-D Navier–Stokes equation. *Duke Math. J. 81*, 1 (1996), 135–157.

[CDLS] S. Conti, C. De Lellis et L. Székelyhidi. h-principle and rigidity for $C^{1,\alpha}$ isometric embeddings. Nonlinear Partial Differential Equations, Abel Symposia, Vol. 7, Springer, 2012, 83–116.

[DG] E. De Giorgi. Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari. *Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Math. Nat. 3* (1957), 25–43.

[DLSz] C. De Lellis & L. Székelyhidi. The Euler equations as a differential inclusion. *Ann. Math. 170* (2009), 1417–1436.

[FS] E.B. Fabes et D.W. Stroock. A new proof of Moser's parabolic Harnack inequality via the old ideas of Nash. *Arch. Rat. Mech. Anal. 96* (1986), 327–338.

[Gr1] M. Gromov. *Partial Differential Relations*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 9. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[Gr2] M. Gromov. *Geometric, Algebraic and Analytic Descendants of Nash Isometric Embedding Theorems.* Manuscrit, IHÉS, octobre 2015.

[G] M. Günther. On the perturbation problem associated to isometric embeddings of Riemannian manifolds. *Ann. Global Anal. Geom. 7*, 1 (1989), 69–77.

[H] Hévéa. Projet mené par V. Borrelli, S. Jabrane, F. Lazarus, B. Thibert, D. Rohmer. `hevea.imag.fr`

[KMS] B. Kirchheim, S. Müller, V. Šverák – *Studying nonlinear PDE by geometry in matrix space*. Geometric analysis and nonlinear partial differential equations, édité par S. Hildebrandt et H. Karcher, Springer-Verlag, 2003, pp. 347–395.

[K] N.H. Kuiper. On C^1 isometric imbeddings, I, II. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 58* [*Indag. Math. 17*] (1955), 545–556, 683–689.

[M] J. Moser. On Harnack's inequality for elliptic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math. 14* (1961), 577–591.

[N] S. Nasar. *A beautiful mind*. A Biography of John Forbes Nash, Jr., Winner of the Nobel Prize in Economics, 1994. Simon & Schuster, 1998.

[Na1] J. Nash. Real algebraic manifolds. *Ann. Math. 56* (1952), 405–421.

[Na2] J. Nash. C^1-isometric embeddings. *Ann. Math. 60* (1954), 383–396.

[Na3] J. Nash. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Ann. Math. 63* (1956), 20–63.

[Na4] J. Nash. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. *Amer. Math. J. 80* (1958), 931–954.

[Na5] J. Nash. Analyticity of the solutions of implicit function problem with analytic data. *Ann. Math. 84* (1966), 345–355.

[Sz] L. Székelyhidi. *From isometric embeddings to turbulence.* Lecture Notes, 2012.

[T] L. Tartar. *Compensated compactness and applications to partial differential equations*. Nonlinear analysis and mechanics : Heriot–Watt symposium, IV, Vol. **39** de Res. Notes in Math. Pitman, Boston, 1979, pp. 136–212.

[V1] C. Villani. Paradoxe de Scheffer–Shnirelman revu sous l'angle de l'intégration convexe, d'après C. De Lellis et L. Székelyhidi. Séminaire Bourbaki, Exp. No. 1001 (novembre 2008).

[V2] C. Villani. *Hypocoercivity*. *Mem. Amer. Math. Soc. 202* (2009), no. 950.

[Y] D. Yang. Günther's proof of Nash's isometric embedding theorem. Manuscrit, 1998. `arXiv :math/9807169v1`