

ODE À L'IMPERFECTION

Il y a cent ans s'éteignait Henri Poincaré, “premier mathématicien de France et du Monde”, comme on le disait dans sa patrie, et dans le reste du monde aussi.

Bourgeois tranquille et replet, myope comme une taupe, il n'en a pas moins fait rêver les hommes pour les siècles à venir, par la puissance de son esprit. Poincaré n'était pas seulement un grand mathématicien; il était aussi un grand physicien, un grand astronome, un grand ingénieur, un grand philosophe, en un mot un grand homme universel, consulté au soir de sa vie comme un oracle sur tous les sujets. Symbole de la force et de l'unité de la pensée humaine, fragile et précieuse, sur laquelle il a écrit d'admirables pages.

La pensée n'est qu'un éclair au milieu d'une longue nuit, mais c'est cet éclair qui est tout.

Poincaré s'intéressait à tout, apprenait tout, révolutionnait les théories mathématiques et physiques, voyait tout en grand. Pas étonnant qu'il fit aussi de grandes erreurs ! Après tout, seuls les morts ne font pas d'erreurs; et Poincaré n'était pas de ceux qui préfèrent se cantonner à des énoncés prudents et insipides qui n'ont même pas le mérite d'être faux.

Sa plus célèbre erreur, celle qui brillera longtemps dans la légende des sciences, il l'a commise en étudiant le problème des Trois Corps. Pourquoi trois corps ? Parce que l'on savait, depuis Newton, résoudre le problème de deux corps en interaction, mais pas celui de trois corps, ou de quatre corps, ou de n'importe quel nombre plus élevé de corps. Prenez seulement deux corps massifs : la Terre et le Soleil par exemple; faites abstraction de tout le reste de l'univers, et calculez leur mouvement à l'aide des équations de Newton. La solution est bientôt trouvée : la Terre dessine une merveilleuse ellipse autour du Soleil, une trajectoire simple et élégante, découverte il y a déjà plusieurs millénaires par les mathématiciens grecs, bien avant que l'on sache la Terre tournante — et redécouverte par l'astronome allemand Johannes Kepler avant même que Newton ait compris l'attraction gravitationnelle.

Avec deux corps, nous avons donc une belle ellipse, stable à l'infini, se répétant jusqu'à la fin des temps. Mais si l'on tient compte des autres corps, des autres planètes, que se passe-t-il ? Après tout, si la Terre est attirée irrésistiblement par le Soleil, elle est aussi influencée par Jupiter, Mars et toutes les planètes plus lointaines. Certes, ces influences ne pèsent pas lourd face à la formidable attraction solaire, mais ne seraient-elles pas capables de détraquer la belle machine ? La Terre continuera-t-elle de tourner pour toujours autour du Soleil, ou un jour finira-t-elle par entrer en collision avec une autre planète ? Dès que l'on tient compte de l'influence d'un troisième astre, on est perdu, on ne sait pas ce qui risque de se produire; et dans le système solaire il y a 9 ou 10 planètes, c'est encore pire ! Mais commençons avec trois corps, et cherchons la réponse au coeur des équations. Stabilité ou instabilité ?

À 35 ans, pour prétendre au prix mathématique offert par le Roi Oscar de Suède, Poincaré étudia le problème des trois corps, dans une version encore un peu simplifiée. Un problème qui le passionnait — lui qui n'aimait rien tant qu'observer le monde environnant pour en tirer les lois constitutives. Un problème qui lui permit de se dépasser ! Le jury n'eut pas de mal à reconnaître le style du jeune mathématicien français dans le manuscrit anonyme qui regorgeait d'idées nouvelles aux noms originaux, et qui démontrait la stabilité de manière si élégante. Poincaré gagna le prix haut la main.

Sa copie n'était pourtant pas parfaite, loin de là. Que de flou, que d'imprécisions, que d'ambiguïtés dans la démonstration de Poincaré ! Rien d'étonnant — tout le monde savait que le génial mathématicien n'était pas un modèle de clarté. Rédaction elliptique, assertions non justifiées, digressions pédagogiques brisant le rythme des arguments; tout cela était familier aux lecteurs de Poincaré. Ses articles bouillonnaient d'idées, mais la vérification n'en était guère aisée, et personne ne fut surpris par la longueur de la liste de remarques que prépara Phragmén, le jeune et talentueux assistant chargé d'éditer le manuscrit de Poincaré.

Poincaré corrigea tant qu'il le pouvait, jusqu'à ce qu'il soit convaincu d'avoir tout repris en main. Un manuscrit bien construit, un édifice irréprochable !

Et pourtant, l'une des lézardes que Phragmén avait repérées dans le monument se mit à tourmenter Poincaré un peu plus qu'il ne fallait. Un jour, il fallut se rendre à l'évidence : tout était faux ! La fissure s'était agrandie, jusqu'à former un trou béant qui entraînait l'écroulement de toute l'architecture du théorème.

Mais Poincaré avait déjà reçu le prix, les honneurs et l'argent, son article était publié, partout on le célébrait. Quelle pression phénoménale sur les épaules du jeune mathématicien ! Que faire de cette preuve vérolée ?

Avant toute chose, éviter de répandre l'erreur — et l'éditeur réussit à rapatrier tous les exemplaires de l'article publié. Heureusement qu'Internet n'existait pas encore ! Il fut possible de tout récupérer, et tout

détruire. L'affaire coûta cher à Poincaré, mais il y allait de sa réputation. Et il pouvait à nouveau faire travailler son puissant cerveau.

Et, à peine croyable ! Poincaré réussit à tout réparer. Avec une différence de taille, certes : sa conclusion avait changé du tout au tout, il avait mis le doigt sur une difficulté majeure, et découvert comment l'instabilité pouvait naître dans la belle mécanique cosmique régie par des équations impeccables et précises comme des horloges.

Des équations plus exactes que la plus précise des horloges suisses, mais si sensibles aux conditions initiales, que les prédictions ultimes peuvent en être modifiées par un grain de poussière, un frôlement d'aile de papillon, comme on le dira plus tard. Un autre français, Jacques Hadamard, vient en renfort de Poincaré, et l'on est forcé de constater que la perfection keplerienne a laissé la place à une sublime imperfection, riche de possibles. Comme Christophe Colomb butant par mégarde sur l'Amérique, Poincaré a découvert un nouveau continent scientifique, un monde imparfait et chaotique, dont les lois, même si elles sont au fond déterministes, mènent à des comportements imprévisibles, qui ne peuvent désormais s'appréhender que sous l'angle statistique.

Vous me demandez de vous prédire les phénomènes qui vont se produire. Si, par malheur, je connaissais les lois de ces phénomènes, je ne pourrais y arriver que par des calculs inextricables et je devrais renoncer à vous répondre; mais, comme j'ai la chance de les ignorer, je vais vous répondre tout de suite. Et, ce qu'il y a de plus extraordinaire, c'est que ma réponse sera juste.

Grande découverte en vérité, et d'autant plus belle, avouons-le, qu'elle était marquée par une grossière erreur. Une erreur qui avec le recul ne paraît plus si grave, mais qui dessine une jolie tache de naissance. Une imperfection qui participe au charme de la théorie du chaos déterministe, comme la petite main palmée de la jeune fille du Procès de Kafka participe à sa beauté.

Et puis malgré son revirement, Poincaré n'avait pas été jusqu'à remettre en question les lois fondamentales de Newton. L'essentiel était sauf, peut-être !

Et dix ans après les magnifiques errements de Poincaré, alors que l'on s'apprête à changer de siècle, les scientifiques peuvent se féliciter de voir toutes les lois de la physique identifiées; pour la première fois l'humanité dispose de théories cohérentes qui expliquent tout : la mécanique, l'astronomie, l'électromagnétisme, les fluides et les ondes...

À dire la vérité, il reste bien un ou deux points inexplicables. L'expérience de Michelson, le rayonnement du corps noir... une ou deux petites aspérités sur le gigantesque diamant. On va s'employer à les polir.

!! Las ! Mises au jour, les petites impuretés prennent une ampleur démesurée, échappent au contrôle des tailleurs. La controverse enfle, on parle bientôt de catastrophe ultraviolette, une catastrophe par où rayonnent une, deux, trois révolutions. La transmutation radioactive des éléments, la relativité, la physique quantique... Il fallut trente ans pour explorer ces nouveaux horizons, qui firent briller d'un éclat différent la lumière, l'énergie et la matière, devenues d'ailleurs improbables synonymes.

Nietzsche l'avait dit : il faut avoir encore du chaos en soi pour accoucher d'une étoile dansante. Poincaré nous a montré que la physique de Newton contenait encore du chaos, et cette physique déterministe a accouché de l'imprédictibilité. Quant à la physique fondamentale du début du vingtième siècle, avec son masque de perfection, elle contenait encore assez de chaos pour accoucher de pas moins de trois étoiles dansantes.

Tiens, des étoiles dansantes... Belle formule, on pense à quelque chose qui scintille, quelque chose de parfait, non ? Les étoiles si belles et parfaites, dansant au son de la musique des sphères ?

!! Quelle blague ! Les étoiles, c'est un grand bazar, le règne de la confusion et de l'instabilité. Avez-vous jamais réfléchi au fait que les gaz s'organisent de manière homogène, se répandent partout, harmonieusement et uniformément, alors que les étoiles, bien au contraire, aiment à se concentrer en "clusters" irréguliers, séparés par d'immenses vides ? Et voilà les étoiles se regroupant en galaxies, les galaxies en amas de galaxies, les amas en super-amas. La partition que jouent les étoiles n'est pas harmonieuse et régulière, elle est pleine de grumeaux, fractale peut-être. À défaut de connaître le compositeur, on connaît le chef d'orchestre de cet étrange ballet stellaire : l'équation de Newton comme toujours, et sa version statistique, l'équation de Vlasov. C'est dans ces équations que l'on traque les propriétés des astres, et l'analyse mathématique nous fournit la clé du comportement irrégulier : l'instabilité de Jeans, qui empêche la matière homogène d'être stable aux grandes longueurs d'onde. Une instabilité — comme une imperfection érigée en loi, un clinamen mathématique d'où naît toute la structure cosmique.

Quant à la musique, ce n'est pas plus parfait que le mouvement des étoiles. Certes, la musique au

départ c'est un art mathématique, construit sur les rapports de fréquences, depuis Pythagore et peut-être bien avant. À 440 battements par seconde, vous entendez un *la*, et si vous doublez la fréquence ce sera encore un *la*, une octave plus haut; et à chaque fois que vous doublez, vous gagnerez une octave. Et puis si vous triplez la fréquence, ce sera une octave plus une quinte, un *Mi*, et vous pouvez ainsi voyager d'octave en octave et de quinte en quinte rien qu'avec des facteurs 2 et 3.

Du moins... c'est ce que l'on aimerait faire. Mais vous pouvez toujours essayer, il est impossible de construire ainsi une gamme parfaite. Car une succession de doubles ne fera jamais une succession de triples, une puissance de 2 ne sera jamais égale à une puissance de 3. Vient le moment où il faut tricher pour construire la gamme, décider comme par décret d'une imperfection constitutive. Soit définir le comma pythagoricien, cette petite béance qui brisera la symétrie naturelle, soit ravager les agencements de fréquences exactes et introduire systématiquement l'irrationnel, au sens premier du terme. Ainsi est notre musique : imparfaite par nature ! Et pourtant si riche, familière et pleine de possibles.

Après tout, l'imperfection nous est familière. Nous baignons dans l'imperfection, nous sommes les enfants de l'imperfection, nous lui devons tout. C'est l'imperfection de la reproduction qui a permis l'évolution des espèces; des centaines de millions de mutations, peut-être, depuis l'invention de la bactérie, ont fait ce que nous sommes; sélectionnés par l'ampleur de nos populations, d'erreur de transcription en erreur de transmission. Comme le clamait la chanteuse rebelle Mama Béa Tekielski, *Nous sommes le résultat d'une équation fausse*. Heureusement ! L'imperfection, statutaire et salutaire, est notre force; tous parfaits, nous serions condamnés. La variabilité génétique est notre meilleur atout face au monde biologique si mouvant et si menaçant. Et elle donne lieu à de si merveilleux mélanges.

L'imperfection, on la retrouve dans tout ce que nous faisons. Dans les langues, dont la fabuleuse diversité est le résultat des innombrables erreurs de restitution, fautes d'orthographe et de grammaire, déformations et malprononciations, mauvais latin gélifié en bon italien, dialectes incertains ravagés par des accents tenaces, et cent mille histoires d'erreurs piédestalisées qui font notre tour de Babel.

L'imperfection est aussi, cela va de soi, tapie dans tous nos programmes informatiques, de plus en plus monumentaux, dont nul ne pourra éradiquer tous les bugs...

Et dans nos réalisations technologiques, condamnées à vivre avec leurs erreurs de conception primordiales, que nul progrès ne pourra amender — comme nos machines écrivantes, affublées, pour toujours peut-être, d'un clavier à l'agencement absurdement inefficace.

Mais la pensée, cet éclair dont nous sommes si fiers, n'est-elle pas parfaite ? Laissez-nous rire ! La pensée humaine, quelle confusion. Ce n'est qu'à grand peine qu'elle a créé le raisonnement mathématique, parfait dans sa forme et sa logique. Mais ce n'est pas là sa forme première. Poincaré l'a bien expliqué en analysant certaines de ses plus magistrales découvertes : les associations d'idées, spontanées et incompréhensibles, succédant aux périodes de réflexion consciente, dans un chaos imprévisible, à l'image de ses théories physiques. Même les grands mathématiciens doivent s'appuyer sur l'irrationnel. Et corollairement, ils sont en butte aux erreurs, même les meilleurs mathématiciens, comme le montre l'exemple Poincaré. Parfois ils font tout à la fois deux erreurs qui ont le bon goût de s'annuler, comme cela arriva à Galilée décrivant la trajectoire d'un boulet de canon; ou parfois, plus tragiquement, ils se heurtent à trois erreurs qui se renforcent, comme celles de Lord Kelvin calculant l'âge de la Terre. On pourrait multiplier les exemples et contre-exemples.

Pourtant il n'y a là rien de tragique; dans le domaine de la pensée humaine comme dans celui des langues et dans celui de la biologie, heureusement que l'erreur est possible, c'est d'elle que naîtra l'inattendu et parfois le sublime !

Allons chercher l'erreur chez un autre symbole de l'illumination constructive, le grand John Nash, qui en dix ans et trois théorèmes révolutionna toute l'analyse mathématique, avant de recevoir le Prix Nobel pour ses travaux de jeunesse.

Quand il travaille à démontrer le théorème du plongement isométrique, répondant à un défi lancé par un collègue qu'il a exaspéré par sa morgue, il a conscience de faire quelque chose de grand. Et c'est avec fierté qu'à l'issue d'une gestation chaotique, il soumet à ses pairs un manuscrit sinueux d'une incroyable complexité, un magma dont les principales idées surnagent à grand peine, une démonstration crue que son collègue Herbert Federer devra remettre en forme au prix de tourments infinis.

Une solution si confuse ! Alors qu'une autre voie existe; trente ans plus tard, le mathématicien allemand Matthias Günther trouvera une solution si simple, si élégante, si parfaite !

Et pourtant, heureusement que Nash ne l'a pas vue, cette solution parfaite. De son magma, repris

et simplifié maintes fois, partiellement faux, est finalement née la technique la plus puissante de l'analyse perturbative non linéaire, la méthode de Nash–Moser, dont l'importance dépasse de très loin le cadre du plongement isométrique — une méthode universelle que nous continuerons à enseigner à nos étudiants pendant les siècles à venir.

Oui, c'est bien de l'imperfection que naissent les grands progrès.

Comme l'a dit un grand chanteur italien touché par la grâce de l'inspiration,

Dai diamanti non nasce niente

Dal letame nascono i fior

(bis)

Cédric Villani, Professeur de l'Université de Lyon, Directeur de l'Institut Henri Poincaré
— pour le festival de La Milanesiana, juillet 2012