Séminaire BOURBAKI Juin 2001
53ème année, 2000-2001, n^{o} 893

LIMITES HYDRODYNAMIQUES DE L'ÉQUATION DE BOLTZMANN (d'après C. BARDOS, F. GOLSE, C.D. LEVERMORE, P.-L. LIONS, N. MASMOUDI, L. SAINT-RAYMOND)

par **Cédric VILLANI**

"Il y aurait bien des objections à faire [au raisonnement mathématique précédent], mais on ne saurait exiger en Mécanique la même rigueur qu'en Analyse pure pour ce qui concerne l'infini."

H. Poincaré, in "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation", *Acta Mathematica 7 (1885), pp. 259–380.*

"Le livre de M. Boltzmann sur les Principes de la Mécanique nous incite à établir et à discuter du point de vue mathématique d'une manière complète et rigoureuse les méthodes basées sur l'idée de passage à la limite, et qui de la conception atomique nous conduisent aux lois du mouvement des continua."

D. Hilbert (1900), *Sur les problèmes futurs des mathématiques (trad. L. Laugel)*, Comptes Rendus du 2ème congrès international des mathématiciens, Gauthier-Villars, Paris 1902.

Le but de cet exposé est de faire le point sur des avancées récentes dans la compréhension mathématique des liens entre équation cinétique de Boltzmann et équations hydrodynamiques. Bien sûr, la citation de Poincaré ci-dessus est à prendre au second degré : l'une des difficultés essentielles du sujet est précisément de rendre parfaitement rigoureux des raisonnements dont la validité formelle semble facile à vérifier. Quant à la citation de Hilbert, malgré le contraste apparent, elle illustre tout aussi bien que celle de Poincaré l'évolution des exigences mathématiques dans ce domaine : en effet, les contributions de Hilbert sur le sujet sont aujourd'hui considérées comme parfaitement non rigoureuses.

Les travaux présentés ci-après sont dus à Bardos, Golse, Levermore, Lions, Masmoudi, Saint-Raymond [BGL2, BGL3, BGL4, BGL5, Go, GL, GLSR, GSR, LeMa, LM3, LM4, SR]. Des recherches intenses continuent à être menées sur le sujet, et les résultats décrits dans cet exposé risquent d'être nettement améliorés dans les mois qui viennent. Pour cette raison aussi bien que par souci de pédagogie, nous avons surtout cherché à dégager les méthodes et idées importantes, plutôt que le détail des preuves.

Après avoir rappelé, dans le premier paragraphe, l'origine physique, les motivations mathématiques et l'historique du problème de limite hydrodynamique, on exposera au paragraphe 2 deux programmes de recherche conçus pour mener à bien une partie de son étude. Le premier est dû à Bardos, Golse et Levermore, tandis que le second est l'adaptation par Golse d'une méthode développée par Yau dans un contexte voisin. Dans les paragraphes 3 à 5, on présentera ensuite les outils et idées qui ont permis de résoudre les principales difficultés associées à ces programmes. Enfin, dans le paragraphe 6 on fera le point sur quelques problèmes qui restent ouverts.

L'auteur remercie vivement Y. Brenier, E. Grenier, C.D. Levermore, N. Masmoudi, L. Saint-Raymond, et tout particulièrement F. Golse pour leur aide durant la préparation de cet exposé.

1. LE PROBLÈME ET SES MOTIVATIONS

1.1. Équations cinétiques

Considérons la modélisation mathématique d'un gaz formé d'une assemblée de n particules identiques en interaction (où n est très grand, disons $10^6 \leq n \leq 10^{23}$), évoluant dans l'espace euclidien[1] $\mathbb{R}^N$ ($N = 3$ étant bien sûr le cadre le plus naturel). Si l'on suppose pour simplifier que la position et la vitesse suffisent à décrire l'état d'une particule, alors l'état du gaz est défini par un point représentatif dans l'espace des phases $(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_v)^n$ — ou plus généralement par une densité de probabilité $f_n(x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n)$ sur cet espace des phases. Une telle description est dite *microscopique*.

On peut alors écrire les lois de Newton sous la forme d'un immense système de $2n$ équations différentielles du premier ordre, faisant intervenir les positions et les vitesses de toutes les particules, ainsi que les forces d'interactions. Un exemple typique est le modèle des *sphères dures*, dans lequel les particules rebondissent les unes sur les autres comme des boules de billard; le flot associé aux équations de Newton est alors bien défini pour presque toute condition initiale (voir [CIP, chapitre 4]) et détermine l'évolution de la densité de probabilité f_n.

Dans presque toutes les applications, on remplace ce modèle, qui contient beaucoup trop d'informations, par un modèle *macroscopique* avec un espace des phases restreint. Ainsi, dans une description *cinétique*, l'état du système à un instant donné est représenté par une densité de probabilité $f(x, v)$, densité de présence de l'ensemble des particules dans l'espace des phases $\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_v$. Selon les forces d'interaction considérées, on aboutit à des équations cinétiques très variées, les plus connues étant celles de **Vlasov** et de **Boltzmann**. C'est cette dernière qui nous intéressera dans la suite.

[1] Pour être un peu plus réaliste, on aimerait considérer des domaines à bord; pour des raisons pédagogiques aussi bien que techniques, nous n'en parlerons pas, et mentionnons juste que les résultats ci-après ne couvrent pas ces domaines. En revanche, nous remplacerons parfois $\mathbb{R}^N$ par le tore plat.

1.2. L'équation de Boltzmann

Cette équation modélise un gaz suffisamment (mais pas trop !) raréfié, dans lequel les particules interagissent par des *collisions* élastiques, réversibles, localisées et instantanées[2]. L'hypothèse de raréfaction permet de négliger les collisions faisant intervenir plus de deux particules. On trouvera dans [C2] et les références incluses de très nombreuses applications de cette équation (ou de ses variantes) à des problèmes théoriques ou concrets. L'un des fondements conceptuels de l'équation de Boltzmann est la très subtile hypothèse du **chaos moléculaire** (voir Kac [K], Cercignani et al. [CIP], Spohn [S]).

Après adimensionnement des constantes, l'équation de Boltzmann s'écrit

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \frac{1}{Kn} Q(f,f), \qquad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad v \in \mathbb{R}^N,$$

où l'inconnue $f = f(t,x,v)$ est une fonction positive, et ∇_x est l'opérateur de gradient par rapport à la variable x. L'opérateur de **transport**, $v \cdot \nabla_x$, traduit la tendance des particules à se déplacer en ligne droite. Le paramètre Kn est le **nombre de Knudsen**, défini de manière heuristique comme l'inverse du nombre moyen de collisions subies par une même particule en une unité de temps macroscopique. Quant aux interactions, elles sont modélisées par l'opérateur quadratique Q, qui n'agit que sur la dépendance de f en la variable v : pour une fonction $f(v)$ donnée,

$$(2) \qquad Q(f,f)(v) = \int_{\mathbb{R}^N} dv_* \int_{S^{N-1}} d\omega \, B(v - v_*, \omega) \big[f(v') f(v'_*) - f(v) f(v_*) \big],$$

$$(3) \qquad v' = v - \langle v - v_*, \omega \rangle \, \omega, \qquad v'_* = v_* + \langle v - v_*, \omega \rangle \, \omega \qquad (\omega \in S^{N-1}).$$

On peut voir (v', v'_*) et (v, v_*) comme les vitesses avant et après le choc, respectivement, de deux particules qui subissent une collision. Bien sûr, $v' + v'_* = v + v_*$, et $|v'|^2 + |v'_*|^2 = |v|^2 + |v_*|^2$, ce qui traduit la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique au cours des collisions (hypothèse de chocs élastiques).

Pour finir d'expliciter l'équation (1), il reste à définir la fonction $B(v - v_*, \omega)$ qui apparaît dans (2) : c'est la **section efficace**, qui dépend de l'interaction microscopique. Dans le cas où cette interaction découle d'un potentiel radial, des formules dues à Maxwell prédisent la forme de B (voir [C1, p. 67–71]). Il existe toute une zoologie de sections efficaces : potentiels durs ou mous, sections intégrables ou singulières... qui influent de manière importante sur les propriétés qualitatives des solutions, voir [Vi]. Ici nous nous contenterons de mentionner le cas où l'interaction est de type "sphères dures" : alors,

$$(4) \qquad B(v - v_*, \omega) = K |\langle v - v_*, \omega \rangle|, \qquad K > 0.$$

[2]C'est-à-dire se déroulant sur des échelles de temps et d'espace très inférieures aux échelles macroscopiques.

Cet exemple n'est pas choisi au hasard : pour diverses raisons techniques importantes, parmi toutes les sections efficaces proposées par Maxwell, c'est la seule pour laquelle on sache démontrer des résultats de limite hydrodynamique rigoureux.

Abréviations : Pour alléger les notations, on écrira, selon l'usage, $\phi = \phi(v)$, $\phi_* = \phi(v_*)$, $\phi' = \phi(v')$, $\phi'_* = \phi(v'_*)$. Si on se donne une fonction $\Phi(v, v_*, v', v'_*)$, on notera aussi $\Phi' = \Phi(v', v'_*, v, v_*)$, et $\Phi_* = \Phi(v_*, v, v'_*, v')$. On abrègera également $B(v - v_*, \omega)$ en B.

Énonçons maintenant les deux propriétés formelles fondamentales de l'opérateur (2); toutes deux découlent de ce que le changement de variables $(v, v_*) \to (v', v'_*)$ est involutif et unitaire. La première est la traduction macroscopique des lois de conservation microscopiques de masse, quantité de mouvement, et énergie : si f est une fonction de $v \in \mathbb{R}^N$, vérifiant des conditions d'intégrabilité adéquates, alors pour $\xi = 1$, v_j $(1 \leq j \leq N)$ ou $|v|^2$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(f, f)\xi(v)\, dv = 0; \tag{5}$$

de là découlent les **lois de conservation locales**

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int f\xi\, dv\right) + \nabla_x \cdot \left(\int f\xi v\, dv\right) = 0. \tag{6}$$

Les quantités $\int f\xi v\, dv$ sont appelées **flux** de masse $(\xi = 1)$, de quantité de mouvement $(\xi = v)$ ou d'énergie cinétique $(\xi = |v|^2/2)$. La version globale de (6) est

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} f\xi\, dv\, dx = 0.$$

La deuxième propriété importante est l'identité

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(f, f)\, \log f\, dv = -D(f), \tag{7}$$

où $D(f)$ est la fonctionnelle de **"dissipation d'entropie"**,

$$D(f) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times S^{N-1}} \Big(f'f'_* - ff_*\Big) \log \frac{f'f'_*}{ff_*}\, B\, dv\, dv_*\, d\omega \geq 0. \tag{8}$$

De (7) découle formellement

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int f \log f\, dv\right) + \nabla_x \cdot \left(\int (f \log f) v\, dv\right) = -D(f) \leq 0. \tag{9}$$

Si l'on note $H(f) = \int f \log f\, dx\, dv$ (H est l'opposé de l'"entropie" physique), on en déduit

$$\frac{d}{dt} H(f(t, \cdot, \cdot)) = -\int_{\mathbb{R}^N} D(f(t, x, \cdot))\, dx \leq 0. \tag{10}$$

Il s'agit là du célèbre "Théorème H" de Boltzmann.

1.3. Équations hydrodynamiques

Dans une description macroscopique *hydrodynamique*, le gaz est représenté par quelques fonctions sur l'espace physique $\mathbb{R}^N_x$: R, U et T, qui représentent respectivement la densité de particules, leur vitesse moyenne et leur température. En termes cinétiques,

(11)
$$R(x) = \int f(x,v)\,dv, \qquad U(x) = \frac{\displaystyle\int f(x,v)v\,dv}{R(x)}, \qquad T(x) = \frac{1}{N}\frac{\displaystyle\int f(x,v)|v-U(x)|^2\,dv}{R(x)}.$$

Dans les applications, on rencontre une infinité de modèles différents, chacun ayant son domaine de validité. Nous ne considérerons ici que les plus simples et les plus fondamentaux[3], obtenus en combinant les lois de Newton et certaines hypothèses phénoménologiques (voir une présentation physique dans [Ba, LL]; mathématique dans [CM, Li3]).

Un paramètre essentiel d'un fluide est sa *viscosité* ν, que nous considérerons comme constante même si elle dépend souvent de la température; elle mesure l'intensité des forces de "friction" microscopiques s'exerçant au sein du fluide. Il ne fait guère de sens de parler de viscosité "grande" ou "petite" car ses effets se font sentir plus ou moins fortement selon les conditions physiques. On introduit donc le **nombre de Reynolds**,

$$Re = \frac{\mathcal{U}L}{\nu},$$

où $\mathcal{U}$ et L désignent respectivement des échelles de vitesse et de distance typiques de l'écoulement fluide. On utilise traditionnellement les équations de

- **Euler** quand le nombre de Reynolds est si grand que l'on néglige les effets visqueux;
- **Stokes** quand le nombre de Reynolds est si petit que l'on néglige les effets convectifs;
- **Navier-Stokes** pour des nombres de Reynolds intermédiaires.

Par exemple, après adimensionnement, le système d'Euler pour un gaz parfait monoatomique s'écrit

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial t} + \nabla_x \cdot (RU) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial (RU)}{\partial t} + \nabla_x \cdot (RU \otimes U) + \nabla_x (RT) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t}\big(R|U|^2 + NRT\big) + \nabla_x \cdot \Big(R|U|^2 U + (N+2)RTU\Big) = 0, \end{cases}$$

où l'on définit la divergence d'un champ matriciel $M(x)$ par $(\nabla \cdot M)_j = \sum_i \partial_i M_{ij}$. Ici la pression prend la forme $p = RT$, loi d'état des gaz parfaits[4]. Dans le contexte de cet

[3] En outre nous éviterons encore le problème important des conditions aux limites.

[4] Que le lecteur risque de ne pas reconnaître instantanément, car R désigne d'ordinaire la constante des gaz parfaits !! Comme d'habitude, la cohérence des notations est un casse-tête insoluble.

exposé, le choix de cette loi d'état se justifie aisément car c'est la seule compatible avec l'équation de Boltzmann; mais il en existe quantité d'autres (voir [Li3]).

À l'équation (12) est associée une vitesse caractéristique de propagation des ondes, dite **vitesse du son**. Pour comprendre ce phénomène, effectuons une *linéarisation* des équations (12) près de l'état stationnaire ($R = 1$, $U = 0$, $T = 1$). Appelant ρ, u, θ les variations respectives de R, U, T au premier ordre, on trouve le système de l'**acoustique**,

$$(13) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_x \cdot u = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_x(\rho + \theta) = 0, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{2}{N}\nabla_x \cdot u = 0,$$

de sorte que la fluctuation de pression, $\rho + \theta$, et celle de flux de matière, $\nabla_x \cdot u$, satisfont à une *équation des ondes*,

$$(14) \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho + \theta) = \frac{N+2}{N}\Delta_x(\rho + \theta), \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla_x \cdot u) = \frac{N+2}{N}\Delta_x(\nabla_x \cdot u),$$

et que leurs variations se propagent à travers l'espace avec une vitesse (adimensionnée) égale à $c = \sqrt{(N+2)/N}$. C'est un phénomène qui nous est bien sûr très familier !

Dans la suite de l'exposé, on s'intéressera au régime particulier des **écoulements incompressibles**. Sans s'embarrasser ici de définitions rigoureuses, rappelons qu'un fluide est dit incompressible si le volume occupé par un ensemble de particules est invariant au cours du temps, ce qui se traduit par la condition mathématique de divergence nulle pour le champ de vitesses. Quant à un *écoulement* incompressible, il s'agit d'un fluide compressible considéré dans des conditions physiques telles qu'il se comporte comme un fluide incompressible. Le degré d'incompressibilité d'un écoulement est mesuré par son *nombre de Mach* : $Ma = \mathcal{U}/c$. Plus ce nombre est petit, plus le comportement du fluide est proche de celui d'un fluide parfaitement incompressible. En particulier, on s'attend à ce que les *fluctuations d'un état d'équilibre global* constituent des écoulements de faible nombre de Mach, avec la relation d'incompressibilité associée, $\nabla_x \cdot u = 0$. Dans la suite nous considérerons uniquement de telles fluctuations.

En régime incompressible, une simplification majeure apparaît : l'équation du champ de vitesses se découple des autres. En fonction de l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds, on choisit traditionnellement pour cette équation entre

$$(15) \qquad \textbf{- Euler incompressible :} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla_x u = -\nabla_x p.$$

$$(16) \qquad \textbf{- Stokes incompressible :} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta_x u - \nabla_x p,$$

$$(17) \qquad \textbf{- Navier-Stokes incompressible :} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla_x u = \nu \Delta_x u - \nabla_x p.$$

On a utilisé ici les notations suivantes : $u \cdot \nabla_x u$ désigne le vecteur dont la composante j est $u \cdot \nabla_x u_j$, et le champ de vecteurs $\Delta_x u$ est défini naturellement par l'action du Laplacien composante par composante. Du fait de l'équation $\nabla_x \cdot u = 0$, on a $u \cdot \nabla_x u = \nabla_x \cdot (u \otimes u)$. La fonction $p = p(t,x)$ est la pression; il est inutile de lui associer une équation, on peut en fait la voir comme un *multiplicateur de Lagrange* associé à la contrainte d'incompressibilité.

À chacune de ces équations on doit associer une équation sur la température, qui est, dans les situations les plus simples,

- advectée dans le cas d'Euler :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \cdot \nabla_x \theta = 0; \tag{18}$$

- dissipée dans le cas de Stokes :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \Delta_x \theta; \tag{19}$$

- advectée et dissipée simultanément dans le cas de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \cdot \nabla_x \theta = \kappa \Delta_x \theta. \tag{20}$$

Ici κ est un coefficient de diffusion thermique, a priori distinct de ν.

Enfin, l'évolution de la densité est déterminée par la **relation de Boussinesq** :

$$\nabla_x(\rho + \theta) = 0, \tag{21}$$

qui implique en fait, par conservation de l'énergie totale, la relation plus forte $\rho + \theta = 0$.

Bien sûr, nous nous sommes limités aux lois les plus simples.

1.4. Approximation hydrodynamique

Une description cinétique est beaucoup plus complexe qu'une description hydrodynamique, ne serait-ce que parce que l'espace des phases est beaucoup plus grand. Dans les applications pratiques, les équations cinétiques nécessitent des calculs extrêmement coûteux — et l'équation de Boltzmann plus que tout autre, à cause de l'intégrale de collision de multiplicité élevée. On a donc intérêt, quand cela est possible, à remplacer un modèle cinétique par un modèle hydrodynamique. La base théorique de cette simplification est l'**hypothèse d'équilibre thermodynamique local**, que nous allons préciser.

Par définition, une distribution $f(x,v)$ est appelée équilibre local pour l'équation de Boltzmann si elle est invariante par l'action de l'opérateur de collision :

$$Q(f,f) = 0. \tag{22}$$

Au vu des formules (7) et (8), on voit facilement que (22) équivaut à

$$f' f'_* = f f_* \qquad \text{pour presque tous } x, v, v_*, \omega. \tag{23}$$

Par un résultat classique, dont l'histoire remonte à Boltzmann, l'équation (23) implique

$$f(x,v) = M_{R,U,T}(x,v) \equiv R(x) \frac{e^{-\frac{|v-U(x)|^2}{2T(x)}}}{(2\pi T(x))^{N/2}}. \tag{24}$$

À champs hydrodynamiques R, U et T fixés, la distribution $M_{R,U,T}$, appelée **Maxwellienne locale**, maximise l'entropie $-H(f)$, (lemme de Gibbs); c'est pourquoi on parle d'équilibre *thermodynamique*.

En vertu du Théorème H et du lemme de Gibbs, il est naturel de penser que la distribution f est proche d'un équilibre local dans un régime physique où les collisions sont très fréquentes, i.e. de **faible nombre de Knudsen**. L'étude des limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann consiste précisément à

(1) prouver une forme d'équilibre thermodynamique local dans l'asymptotique $Kn \to 0$,

(2) en déduire des équations limites pour les champs hydrodynamiques associées à f.

Les notes de cours [Go], rédigées pour des lecteurs mathématiciens, constituent une introduction très accessible à ces problèmes.

Remarque 1.1. — Une limite formelle qui semble naturelle aboutit parfois à des équations hydrodynamiques inappropriées, comme en témoignent les subtils “ghost effects” mis à jour par Sone et ses collaborateurs (voir [SATSB] ou [Go, p. 34]).

Remarque 1.2. — Bien sûr, cela n'a guère de sens physique d'introduire une *famille* de solutions dépendant d'un paramètre (Kn) qui tend vers 0; c'est une façon qualitative de formaliser mathématiquement la petitesse de Kn. Il serait plus satisfaisant d'établir une *estimation quantitative* de l'erreur commise en remplaçant l'équation cinétique par l'équation hydrodynamique.

1.5. Le sixième problème de Hilbert

Le sixième problème de Hilbert est une motivation théorique de l'étude de limite hydrodynamique : peut-on axiomatiser la mécanique, et en particulier (voir la citation en exergue) *peut-on établir rigoureusement les équations fondamentales de la mécanique des fluides à partir d'un modèle microscopique gouverné par les lois de Newton ?* Ce célèbre problème de physique statistique a été étudié de façon intensive, comme en témoigne l'abondance des travaux cités dans les ouvrages de synthèse [S] et [KL]; sa solution n'est connue, à l'heure actuelle, que pour certains modèles simplifiés non réalistes.

Dans cette optique, Hilbert proposait de passer des équations de Newton à l'équation de Boltzmann, puis de l'équation de Boltzmann aux diverses équations de l'hydrodynamique. On perd ainsi de la généralité, car l'équation de Boltzmann ne peut aboutir qu'à une classe restreinte d'équations hydrodynamiques, i.e. avec loi d'état des gaz parfaits. Pour autant, chacune des deux étapes demeure extrêmement délicate.

1.6. Statut mathématique de ces équations

Pour éclairer la difficulté du problème de limite hydrodynamique, faisons le point sur l'état de la théorie mathématique des principales équations de mécanique des fluides. On se limite ici au **problème de Cauchy** : étant donnée une condition initiale, sous quelles hypothèses peut-on affirmer que l'équation admet une unique solution, physiquement réaliste[5] ? En outre, que dire de sa régularité, de son intégrabilité...?

Il n'existe toujours pas de théorie satisfaisante du problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann, malgré les efforts soutenus de nombreux mathématiciens, à commencer par Carleman [Cr] dans les années 30. L'alternative actuelle est entre

- des solutions fortes sous des hypothèses très restrictives (solution définie en temps petit, ou bien donnée initiale petite, ou proche d'un état d'équilibre global, ou encore indépendante de la variable x);

- les solutions "renormalisées" construites par la théorie de DiPerna et Lions [DPL1, DPL2, Li2] sous des hypothèses extrêmement générales. On ignore si ces solutions satisfont un théorème d'unicité[6], ou les lois de conservation élémentaires. En outre, on ignore tout de la formation éventuelle de singularités.

On pourra consulter [Vi, chap. 2] pour de nombreuses références sur tous ces résultats. Dans le contexte des limites hydrodynamiques, la théorie la plus étudiée a été celle des perturbations d'un état d'équilibre global, développée par Grad, Caflisch, Maslova, Ukai,... qui s'appuie sur la théorie spectrale des opérateurs linéaires.

En ce qui concerne les équations hydrodynamiques, on trouvera un état de l'art assez complet sur le problème de Cauchy, incluant des avancées très récentes, dans [Li3, Li4]. On se limitera ici à des considérations simples. Contrairement à leurs homologues cinétiques, les théories hydrodynamiques actuelles sont très sensibles à la dimension d'espace, N.

Parlons d'abord des modèles incompressibles. Si les équations de Stokes ou de l'acoustique ne posent guère de problème, il n'en va pas de même de celles d'Euler ou de Navier-Stokes, dont le terme quadratique mène à d'immenses difficultés. En dimension 2, on peut surmonter ces difficultés, et même étudier des questions très fines (dans le cas d'Euler, la régularité de "poches de tourbillon", la stabilité de solutions singulières... pour des références et explications détaillées, voir l'exposé de Gérard [Ge2]).

Pour Navier-Stokes incompressible en dimension 3, l'alternative est la même que pour Boltzmann. D'une part, on sait construire des solutions régulières en temps petit [Ld, T] ou pour une donnée initiale petite (voir par exemple [Cn]). D'autre part, la théorie de Leray [Le1, Le2, Le3] assure, sous des hypothèses très générales, l'existence de solutions faibles, dont l'unicité n'est pas garantie; quant à leur régularité, il s'agit d'un célèbre problème ouvert (voir [CKNS]), récemment mis à prix pour une forte récompense !

Pour Euler incompressible en dimension 3, la situation est pire : on sait qu'il existe des solutions régulières en temps petit, mais on ne dispose d'aucun théorème d'existence globale, à l'exception des "solutions dissipatives" introduites par Lions [Li3]. Si Arnold a donné une interprétation séduisante de cette équation en termes de géodésiques d'un

[5]Au sens où elle suit les principales lois physiques attendues : conservations, etc.

[6]On sait cependant que s'il existe une solution forte, alors c'est l'unique solution renormalisée.

groupe de Lie de dimension infinie (voir [AK]), il semble que cette information soit insuffisante pour résoudre le problème de Cauchy (voir [EM]...).

Quant aux modèles compressibles, ils sont encore plus mal compris. Grâce au célèbre théorème de Glimm [Gl], on peut montrer l'existence de solutions faibles en temps grand pour le système d'Euler compressible, si l'état initial est une perturbation d'un état d'équilibre... en dimension 1 seulement ! Par ailleurs, la théorie générale des systèmes de lois de conservation hyperboliques assure l'existence d'une solution classique en temps petit pour des données initiales suffisamment régulières. En ce qui concerne Navier-Stokes compressible, un cas particulier important, dit isentropique, a été l'objet de nombreuses études récentes : voir [Li4].

Pour conclure, un résultat important doit être mentionné ici : Sideris [Si] a prouvé que le système d'Euler compressible peut mener à l'apparition spontanée de singularités en temps fini. Ce phénomène n'est pas encore pleinement compris; voir cependant [Al] pour une revue synthétique et de nombreux résultats sur l'apparition de singularités.

Remarque 1.3. — Le théorème de Sideris suggère une autre motivation pour l'étude des limites hydrodynamiques (motivation qui relève encore de l'utopie très lointaine !) On pourrait imaginer que l'équation de Boltzmann, dans la limite de faible nombre de Knudsen, puisse constituer une approximation commode de l'équation d'Euler compressible. À l'appui de cette idée, on notera que pour certains modèles hydrodynamiques simples, d'importants progrès mathématiques ont été réalisés récemment grâce à leur réinterprétation comme limites hydrodynamiques d'équations cinétiques ad hoc (non physiques), les premiers travaux du genre étant [LPT1, LPT2, LPS] (voir aussi [GM]). Comme il est évoqué dans Cercignani et al. [CIP, p. 318], on pourrait aussi imaginer que le Théorème H de Boltzmann suggère des critères physiquement réalistes d'unicité des solutions faibles de l'équation d'Euler compressible en présence de chocs, à la manière des critères d'entropie de Lax ou de Dafermos [D, paragraphes 8.5 et 9.4].

1.7. **Bref historique du problème de limite hydrodynamique**

Les premières études mathématiques des limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann sont dues à Hilbert [H] d'une part, Chapman et Enskog [E] d'autre part. Il s'agit dans les deux cas de travaux purement formels (ce qui n'empêcha pas Hilbert d'annoncer une solution complète du problème ! Voir les notes historiques, citations et commentaires dans [TM]). La méthode de Hilbert consiste à rechercher *une* solution formelle de la famille d'équations de Boltzmann (1), à Kn variable, sous la forme

$$f(t,x,v;\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n(t,x,v), \qquad \varepsilon = Kn. \tag{25}$$

En identifiant les coefficients des différentes puissances de ε, on obtient alors des systèmes d'équations pour f_0, $f_0+\varepsilon f_1$, $f_0+\varepsilon f_1+\varepsilon^2 f_2$, etc. La méthode de Chapman-Enskog est une variante où les f_n sont des fonctions des champs hydrodynamiques $R(t,x;\varepsilon)$, $U(t,x;\varepsilon)$, $T(t,x;\varepsilon)$ associés à f_ε, et de v : pour ces deux approches consulter [Gr2, C1].

Les deux méthodes permettent de retrouver formellement les équations d'Euler et Navier-Stokes (compressibles ou non). Cependant, il faut remarquer que si l'on pousse le développement au-delà de l'ordre 2, on obtient des équations (Burnett, "super-Burnett"...) dont la validité physique est très douteuse [TM], et qui en tout état de cause se sont montrées parfaitement inutiles. En outre, ces développements asymptotiques ne sont pas convergents en général pour ε fixé (voir les discussions dans [Gr2, TM]), et ne peuvent représenter qu'une classe de solutions très particulières. En dépit de ces remarques, les méthodes de Hilbert et Chapman-Enskog sont aujourd'hui encore très utilisées en modélisation, leur succès tenant certainement à leur caractère systématique.

Grad [Gr1, Gr2] proposa une autre méthode, conceptuellement plus simple et plus sûre, dite méthode des moments : on commence par écrire, à nombre de Knudsen fixé, les équations satisfaites par les quantités $\int_{\mathbb{R}^N} f(t,x,v)v_1^{\alpha_1}\dots v_N^{\alpha_N}\,dv$, parmi lesquelles se trouvent bien sûr les quantités R, RU, $R(|U|^2+NT)$ qui vérifient les lois de conservation locales (6). Tout le problème consiste alors à *fermer* ces équations à la limite par une règle basée sur l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local (qu'il faut justifier !).

Que ce soit par un développement de Hilbert modifié[7], ou bien par la méthode des moments, parfois avec l'aide d'un théorème de Cauchy-Kowalevskaya, de nombreux résultats rigoureux de limites hydrodynamiques furent obtenus par divers auteurs dans un cadre perturbatif [As, AU, BU, Ca2, Ca3, DMEL, EP, ELM1, ELM2, MR, N, UA] : par exemple, notons la justification par Caflisch [Ca2] de la limite vers le système d'Euler compressible en temps petit, ou bien celle par Bardos et Ukai [BU] de la limite vers Navier-Stokes incompressible. Ces méthodes présentent plusieurs avantages : elles sont systématiques, et fournissent des solutions régulières de l'équation de Boltzmann, aussi longtemps que les équations hydrodynamiques limites sont régulières.

En contrepartie, ces démonstrations *ne s'appliquent que sur un intervalle de temps où l'on est assuré de la régularité des solutions hydrodynamiques.* C'est cette restriction que Bardos, Golse et Levermore [BGL1, BGL2, BGL3] proposèrent de lever au début des années 90, tout en augmentant considérablement la généralité des données autorisées, grâce à la théorie de DiPerna et Lions, combinée à une adaptation astucieuse de la méthode des moments. Le but final était donc l'obtention d'*un théorème de limite hydrodynamique qui ne nécessiterait que des estimations a priori données par la physique : masse, énergie, entropie.* Malgré les difficultés considérables liées à notre peu de connaissance des solutions renormalisées, ce programme vient de remporter des succès importants, le plus spectaculaire — mais pas le seul ! —, annoncé très récemment, étant *le passage des solutions faibles de DiPerna-Lions aux solutions faibles de Leray.*

[7]Tronqué, de façon fort peu satisfaisante, car à un ordre beaucoup plus élevé qu'il n'est formellement nécessaire... En outre la positivité des solutions ainsi construites n'est pas toujours garantie ! De nombreuses applications de cette méthode sont passées en revue dans [ELM3].

Avant de présenter ce programme plus précisément, parlons brièvement des autres asymptotiques liées au sixième problème de Hilbert. Pour ce qui est de la limite [équations microscopiques $\longrightarrow$ équation de Boltzmann], le résultat qui fait autorité est le (presque trentenaire) théorème de Lanford [La], étendu par Illner et Pulvirenti [IP], dont les hypothèses restent très restrictives : donnée initiale petite, gaz de sphères dures (voir [CIP, chapitre 4] pour une excellente revue). Quant à la limite [équations microscopiques $\longrightarrow$ équations hydrodynamiques], elle a progressé spectaculairement avec les travaux de Varadhan et ses collaborateurs (voir [GPV], et l'exposé de Comets [Co]), sans pour autant parvenir à couvrir des situations réalistes. Parmi les résultats marquants de ces dernières années, mentionnons (1) la preuve partielle par Olla, Varadhan et Yau [OVY] de la limite de systèmes microscopiques Hamiltoniens assez généraux vers un système d'Euler compressible, tant que sa solution reste régulière; (2) le travail récent de Quastel et Yau [QY] qui réalise le passage d'une certaine dynamique microscopique stochastique sur un réseau, vers les solutions faibles de Leray. Quantité de résultats liés, faisant partie d'un important programme suggéré par Morrey [M], sont passés en revue dans [KL].

2. LE PROGRAMME DE BARDOS, GOLSE ET LEVERMORE

2.1. Régime de fluctuations

Le programme de Bardos, Golse et Levermore (programme BGL) concerne l'étude des solutions renormalisées de DiPerna-Lions dans un *régime de faible nombre de Mach et de faible nombre de Knudsen.* La première condition est obtenue par l'étude des fluctuations de l'équilibre global

$$M(v) = M_{1,0,1}(v) = \frac{e^{-\frac{|v|^2}{2}}}{(2\pi)^{N/2}}, \tag{26}$$

Notant ε le nombre de Knudsen, on posera donc $f_\varepsilon = M(1+\delta g_\varepsilon)$, où δ, proportionnel au nombre de Mach, est appelé à tendre vers 0, et on s'intéressera aux fluctuations hydrodynamiques

$$\rho_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} M g_\varepsilon \, dv, \qquad u_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} M\, g_\varepsilon v \, dv, \qquad \theta_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} M g_\varepsilon \left(\frac{|v|^2}{N} - 1\right) dv. \tag{27}$$

On fait ensuite tendre *simultanément* ε et $\delta = \delta_\varepsilon$ vers 0. L'hypothèse d'équilibre thermodynamique local se transforme alors naturellement en l'énoncé suivant : asymptotiquement, $M g_\varepsilon$ est une *fluctuation Maxwellienne de l'équilibre global*, ou encore : *il existe des champs* $\rho(t,x)$, $u(t,x)$, $\theta(t,x)$ *tels que, dans la limite où* $\varepsilon \to 0$,

$$g_\varepsilon(t,x,v) \longrightarrow g(t,x,v) = \rho + u\cdot v + \theta\left(\frac{|v|^2 - N}{2}\right). \tag{28}$$

On a bien sûr dans ce cas $\rho = \int Mg\, dv$, $u = \int Mgv\, dv$, $\theta = \int Mg(\frac{|v|^2}{N} - 1)\, dv$.

On pourrait s'attendre à obtenir à la limite les équations fondamentales de la mécanique des fluides incompressibles. En fait, comme il est facile de s'en convaincre, on ne peut retrouver que l'équation de l'acoustique... car les équations d'Euler, Stokes et Navier-Stokes décrivent les mouvements d'un fluide incompressible sur des échelles de temps beaucoup plus grandes que celle de l'acoustique. Cela suggère une dilatation de l'échelle de temps macroscopique par un facteur τ_ε^{-1}, où τ_ε est susceptible de tendre vers 0 avec ε. L'équation considérée est donc finalement

$$\tau_\varepsilon \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon), \qquad f_\varepsilon = M(1 + \delta_\varepsilon g_\varepsilon). \tag{29}$$

La *relation de von Karman*,

$$Re = \frac{Ma}{Kn} = \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} \tag{30}$$

permet de prédire si le régime limite sera visqueux ou non. Quelques manipulations astucieuses suggèrent que les quantités ρ_ε, u_ε, θ_ε, obtenues à partir de f_ε via (27), satisfont asymptotiquement les équations de

- l'acoustique si $\tau_\varepsilon = 1$;
- Euler incompressible si $\tau_\varepsilon = \delta_\varepsilon$, $\delta_\varepsilon/\varepsilon \to +\infty$;
- Navier-Stokes incompressible si $\tau_\varepsilon = \varepsilon = \delta_\varepsilon$;
- Stokes si $\tau_\varepsilon = \varepsilon$, $\delta_\varepsilon/\varepsilon \to 0$.

Remarque 2.1. — Dans l'un quelconque des trois derniers cas, il se peut bien sûr que le champ de vitesses à l'instant initial, u_ε^{in}, ne vérifie pas la condition d'incompressibilité asymptotique, $\nabla_x \cdot u_\varepsilon^{in} \longrightarrow 0$. Dans ce cas, c'est en fait la limite de Pu_ε^{in} qui doit être prise comme donnée initiale u^{in} dans les équations hydrodynamiques, où P est le **projecteur de Leray**, i.e. la projection orthogonale dans L^2 sur l'espace des champs de divergence nulle (le noyau de P est donc constitué par les gradients de fonctions scalaires). Une remarque similaire à celle-ci vaut pour la relation de Boussinesq (21) : plutôt que le couple $\lim_{\varepsilon\to 0}(\rho_\varepsilon^{in}, \theta_\varepsilon^{in})$, c'est le couple $\lim_{\varepsilon\to 0}(\frac{2}{N+2}\rho_\varepsilon^{in} - \frac{N}{N+2}\theta_\varepsilon^{in}, \frac{N}{N+2}\theta_\varepsilon^{in} - \frac{2}{N+2}\rho_\varepsilon^{in})$ qui doit être pris comme donnée initiale (ρ^{in}, θ^{in}) dans les équations hydrodynamiques. En fait, au vu de (14), les variations de $\nabla_x \cdot u_\varepsilon$ et de $\rho_\varepsilon + \theta_\varepsilon$ sont propagées par les ondes acoustiques à une échelle de temps macroscopique extrêmement brève si $\tau_\varepsilon \to 0$.

Remarque 2.2. — Comme on s'intéresse à un régime perturbatif d'un état d'équilibre global, on s'attend à ce que la partie linéarisée prédomine dans l'opérateur de Boltzmann. Définissons donc l'opérateur bilinéaire symétrique $Q_{\mathrm{sym}}(\cdot,\cdot)$ par polarisation de (2), et

$$\mathcal{L}g = -2M^{-1} Q_{\mathrm{sym}}(M, Mg). \tag{31}$$

L'opérateur $\mathcal{L}$ est symétrique pour le produit scalaire usuel dans $L^2(M\,dv)$, et admet une unique extension auto-adjointe dans cet espace. La convention de signe a été choisie de sorte que $\mathcal{L}$ soit positif. Si $f_\varepsilon = M(1+\delta_\varepsilon g_\varepsilon)$, alors

$$Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon) = -M\delta_\varepsilon \mathcal{L} g_\varepsilon + \delta_\varepsilon^2 Q(Mg_\varepsilon, Mg_\varepsilon).$$

Comme on le verra, c'est cet opérateur $\mathcal{L}$ qui détermine la viscosité ν et le coefficient de diffusion thermique κ.

Remarque 2.3. — Notons bien qu'il existe de nombreux autres changements d'échelles ! Plus de dix systèmes limites différents ont été recensés, sans compter ceux que l'on peut obtenir à partir de variantes de Boltzmann. Et telle équation hydrodynamique, par exemple Navier-Stokes, peut apparaître dans plusieurs contextes différents, parfois avec des lois de température distinctes de (20); en ce sens on devrait dire que l'on s'intéresse au passage de l'équation de Boltzmann à *une* équation de Navier-Stokes...

2.2. **Théorie de DiPerna-Lions**

Dans le programme BGL, le point de départ est la théorie de DiPerna-Lions, sous une forme légèrement modifiée pour inclure des perturbations d'un équilibre global. On note

$$H(f|g) = \int \left(f \log \frac{f}{g} - f + g \right) dx\, dv,$$

("entropie relative" de f par rapport à g), et $w - L^p$ l'espace de Lebesgue L^p ($p \geq 1$) muni de sa topologie faible. Pour l'espace des positions, on se limitera à des domaines sans bord : l'espace $\mathbb{R}^N$, le tore plat $\mathbb{T}^N$.

Théorème 2.4 (adapté de DiPerna, Lions). — *Soient $\varepsilon, \tau_\varepsilon, \delta_\varepsilon > 0$ fixés, et soit $B(v - v_*, \omega)$ une section efficace satisfaisant à*

$$B \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N; L^1(S^{N-1})), \qquad \int_{S^{N-1}} B(z,\omega)\, d\omega = o(|z|^2) \text{ quand } |z| \to \infty, \tag{32}$$

et $B > 0$ presque partout. Soit $\Omega_x = \mathbb{R}^N$ ou $\mathbb{T}^N$. Soit $f_\varepsilon^{in}(x,v)$ une donnée initiale positive sur $\Omega_x \times \mathbb{R}^N_v$, satisfaisant à $H(f_\varepsilon^{in}|M) < +\infty$. Alors il existe une fonction positive $f_\varepsilon(t,x,v) \in C(\mathbb{R}^+; w - L^1(\Omega_x \times \mathbb{R}^N_v))$, telle que $f_\varepsilon(0,\cdot,\cdot) = f_\varepsilon^{in}$, et telle que pour toute non-linéarité β vérifiant

$$\beta \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), \quad \beta(0) = 0, \quad \beta'(G) \leq \frac{C}{1+G} \qquad (C > 0), \tag{33}$$

l'équation suivante soit vérifiée au sens des distributions :

$$\tau_\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \beta\left(\frac{f_\varepsilon}{M}\right) + v \cdot \nabla_x \beta\left(\frac{f_\varepsilon}{M}\right) = \varepsilon^{-1} \beta'\left(\frac{f_\varepsilon}{M}\right) \frac{Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{M}. \tag{34}$$

Remarque 2.5. — L'introduction de β, appelée renormalisation, permet de ne faire intervenir dans (34) que des termes bien définis au sens des distributions, car l'opérateur $f \longmapsto \beta'(f/M)Q(f,f)/M$ est essentiellement sous-linéaire, au vu de l'inégalité dans (33). Les équations (29) et (34) sont bien sûr formellement équivalentes par "chain-rule".

Remarque 2.6. — La définition de DiPerna-Lions [DPL1] ne considère que des renormalisations de la forme $\beta(f)$; l'extension présentée ici est un cas particulier de celle de [Li2, p. 450]. Dans les articles de Bardos, Golse et Levermore, on choisit typiquement $\beta(G) = \log(1-\alpha+\alpha G)$, $0<\alpha<1$.

Pour une démonstration du théorème 2.4, on pourra consulter l'exposé de Gérard [Ge1]. Une démonstration plus synthétique a été proposée plus récemment par Lions [Li2], grâce à l'important théorème dit de "régularité de l'opérateur Q^+" (voir références dans [Vi]).

Dans l'optique de la méthode des moments, il importe de savoir si les lois de conservation locales (6) sont vérifiées. Pour des raisons techniques majeures, la théorie de DiPerna-Lions ne peut le garantir que pour $\xi = 1$. Si $\xi = v$, on a seulement une variante affaiblie, "avec défaut" [LM4] : il existe une fonction matricielle symétrique positive S telle que

$$\tau_\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f_\varepsilon\, v\, dv\right) + \nabla_x \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} f_\varepsilon\, v\otimes v\, dv\right) = -\nabla_x \cdot S. \tag{35}$$

Enfin, la théorie de DiPerna et Lions ne garantit pas non plus le Théorème H, même sous la forme (10). À la place, on dispose à ce jour d'une forme intégrale affaiblie,

$$\forall\, t_0 \geq 0, \qquad H\big(f_\varepsilon(t_0,\cdot,\cdot)|M\big) + \frac{1}{\varepsilon\tau_\varepsilon}\int_0^{t_0}\int_{\Omega_x} D(f_\varepsilon(t,x,\cdot))\,dx\,dt \leq H(f_\varepsilon^{in}|M). \tag{36}$$

2.3. Stratégie générale de BGL

Pour garantir que $f = f_\varepsilon$ soit bien une perturbation de M, de taille (au plus) δ_ε, on fait à l'instant initial une hypothèse de petitesse de l'entropie relative :

$$H(f_\varepsilon^{in}|M) \leq C^{in}\delta_\varepsilon^2. \tag{37}$$

Bien sûr, cela entraîne, au vu de (36), que pour tout $t\geq 0$,

$$\frac{1}{\delta_\varepsilon^2} H(f_\varepsilon(t,\cdot,\cdot)|M) + \frac{1}{\varepsilon\tau_\varepsilon\delta_\varepsilon^2}\int_0^t\int_{\Omega_x} D(f_\varepsilon(s,x,\cdot))\,ds\,dx \leq C^{in}. \tag{38}$$

La suite du programme BGL s'énonce simplement :

(1) montrer qu'à extraction d'une sous-suite près, $g_\varepsilon \longrightarrow g$;

(2) montrer que Mg est une fluctuation de Maxwellienne, eq. (28);

(3) passer à la limite dans les équations satisfaites par les moments de g_ε.

2.4. Stratégie alternative : la méthode de Yau

Introduite dans le contexte des limites hydrodynamiques de systèmes de particules stochastiques [OVY, Va, Y1, Y2], cette méthode a été adaptée par Golse [Go] au contexte cinétique, après que Brenier [Bn] en eut redécouvert indépendamment une variante. Le principe est le suivant : on introduit explicitement une solution (ρ,u,θ) de l'équation hydrodynamique limite, et on construit une distribution cinétique $\widetilde{f}_\varepsilon$ dont les paramètres hydrodynamiques sont très proches de cette solution. Par exemple, pour le système d'Euler incompressible, avec $\rho = \theta = 0$, on introduit u solution de (15) (et $\nabla_x \cdot u = 0$), puis $\tilde{f}_\varepsilon(t, x, v) = M_{1,\delta_\varepsilon u,1}$. On cherche ensuite à montrer, par un lemme de Gronwall, que

$$\left[\frac{1}{\delta_\varepsilon^2} H\big(f_\varepsilon^{in} | \tilde{f}_\varepsilon^{in}\big) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0\right] \Longrightarrow \left[\forall t \geq 0, \quad \frac{1}{\delta_\varepsilon^2} H\big(f_\varepsilon(t,\cdot,\cdot) | \tilde{f}_\varepsilon(t,\cdot,\cdot)\big) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0\right], \tag{39}$$

cette dernière limite entraînant que $u_\varepsilon \longrightarrow u$.

Remarque 2.7. — La différence essentielle avec l'approche précédente est que dans l'approche de Yau, on considère l'entropie relative par rapport à un équilibre *local* et non par rapport à l'équilibre *global*.

Cette méthode est plus exigeante que la précédente : d'abord, dériver $H(f_\varepsilon(t,\cdot,\cdot)|\tilde{f}_\varepsilon(t,\cdot,\cdot))$ par rapport à la variable t nécessite une certaine forme de régularité. Ensuite, la méthode amène à une hypothèse plus contraignante sur la famille des données initiales ("bien préparées"). Le résultat final est cependant plus précis, et plus quantitatif. Pour un survol des applications de la méthode d'entropie, on pourra consulter [GLSR].

2.5. **Résultats**

Le programme BGL s'avère donner d'excellents résultats pour les limites de l'acoustique, Stokes et Navier-Stokes; en revanche il échoue pour la limite d'Euler, par suite du manque d'estimations de compacité forte. Pour des raisons (non essentielles) de commodité mathématique, les résultats qui suivent seront énoncés dans le cas où la variable d'espace appartient au tore plat, $\mathbb{T}^N$, avec une exception importante (théorème 2.10).

Commençons par le cas le plus simple : l'acoustique.

Théorème 2.8 (Golse, Levermore). — *On pose $\Omega_x = \mathbb{T}^N$. Supposons $\tau_\varepsilon = 1$, $\delta_\varepsilon = O(\varepsilon^\beta)$, où $\beta > 1/2$. Soient f_ε^{in} une famille de données initiales satisfaisant à* (37), *et $f_\varepsilon = M(1 + \delta_\varepsilon g_\varepsilon)$ des solutions renormalisées associées, construites par le théorème 2.4. On suppose également que les moments $\rho_\varepsilon^{in}, u_\varepsilon^{in}, \theta_\varepsilon^{in}$ associés à g_ε^{in} via les formules* (27) *convergent faiblement quand $\varepsilon \to 0$, au sens des distributions, vers des fonctions $\rho^{in}, u^{in}, \theta^{in} \in L^2(\Omega_x)$. Alors, Mg_ε converge faiblement vers une fluctuation de Maxwellienne, eq.* (28), *où ρ, u, θ sont des solutions faibles du système de l'acoustique* (13), *avec données initiales ρ^{in}, u^{in}, θ^{in}.*

Avant ce théorème, Bardos, Golse et Levermore [BGL5] avaient prouvé un résultat similaire sous des hypothèses plus contraignantes (section efficace bornée). Une extension en est la convergence forte de g_ε vers g si g_ε^{in} converge fortement vers g.

Avant d'aborder la limite de Stokes, nous allons énoncer un lemme préliminaire issu de la théorie des opérateurs linéaires. On suppose que l'opérateur de collision (31) est coercif dans $L^2(M\,dv)$ (sous l'hypothèse (32), cela est vrai par exemple si B est minorée par une constante strictement positive, ou bien si $\int B(z,\omega)\,d\omega \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$); dans la suite, nous ferons cette hypothèse sur B sans le rappeler. On montre alors qu'il existe des fonctions uniques ϕ (matricielle) et ψ (vectorielle) dont toutes les composantes sont orthogonales au noyau de $\mathcal{L}$, telles que (I_N désignant la matrice identité)

$$\mathcal{L}\phi = v \otimes v - \frac{|v|^2}{N} I_N, \qquad \mathcal{L}\psi = \frac{|v|^2 v}{2} - \frac{N+2}{2} v, \tag{40}$$

Théorème 2.9 (Golse, Levermore). — *On reprend les notations du théorème 2.8, et on suppose cette fois que $\tau_\varepsilon = \varepsilon$, $\delta_\varepsilon = O(\varepsilon^\beta)$, $\beta > 1$. On suppose en outre que Pu_ε^{in} et $\frac{N}{N+2}\theta_\varepsilon^{in} - \frac{2}{N+2}\rho_\varepsilon^{in}$ convergent faiblement, quand $\varepsilon \to 0$, vers des fonctions u^{in}, $\theta^{in} \in L^2(\Omega_x)$. Alors, Mg_ε converge faiblement vers une fluctuation de Maxwellienne, eq.* (28)*, telle que $\rho + \theta = 0$, $\nabla_x \cdot u = 0$, et (u, θ) soit solution du système de Stokes* (16)–(19)*, avec données initiales u^{in}, θ^{in}, où la viscosité ν et le coefficient de diffusion κ sont déterminés par les formules*

$$\nu = \frac{1}{(N-1)(N+2)} \int_{\mathbb{R}^N} \phi : \mathcal{L}\phi \, M \, dv, \qquad \kappa = \frac{2}{N(N+2)} \int_{\mathbb{R}^N} \psi \cdot \mathcal{L}\psi \, M \, dv, \tag{41}$$

où l'on note $A : B = \sum_{ij} A_{ij} B_{ij}$.

Les premiers résultats de ce type sont dus à Bardos, Golse et Levermore [BGL3], conditionnellement à l'hypothèse que les solutions renormalisées satisfont les lois de conservation locales. Par la suite, Lions et Masmoudi [LM4] montrèrent que l'on pouvait se passer de cette hypothèse en utilisant la positivité de la matrice S dans (35). Cependant, ces travaux restaient limités à l'équation sur le champ de vitesses; ce n'est que dans [GL] que Golse et Levermore parvinrent à obtenir l'équation de température (19). Une étude de la convergence forte de g_ε, des estimations asymptotiques de $g_\varepsilon - \Pi g_\varepsilon$, où Π est la projection orthogonale dans $L^2(M\,dv)$ sur l'espace vectoriel engendré par $1, v, |v|^2$, sont également possibles.

On considère ensuite la limite de Navier-Stokes, considérablement plus délicate.

Théorème 2.10 (Golse, Levermore, Lions, Masmoudi, Saint-Raymond). — *On suppose maintenant que $\tau_\varepsilon = \delta_\varepsilon = \varepsilon$, que $B(z,\omega)/|\cos(z,\omega)|^{N-2}$ est majorée et minorée par des constantes strictement positives, et que les fonctions ϕ, ψ dans* (40) *sont à croissance au plus polynomiale*[8]*. On se limite en outre au cas où $\Omega_x = \mathbb{R}^N$ avec $N = 3$. On suppose que Pu_ε^{in}, $\frac{N}{N+2}\theta_\varepsilon^{in} - \frac{2}{N+2}\rho_\varepsilon^{in}$ convergent au sens des distributions vers u^{in}, $\theta^{in} \in L^2(\Omega_x)$. Alors, avec les mêmes notations que précédemment, il existe une sous-suite (ε_n), telle que Mg_{ε_n} converge faiblement vers une fluctuation de Maxwellienne, eq.* (28)*, satisfaisant à $\rho + \theta = 0$, $\nabla_x \cdot u = 0$, $u, \theta \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega_x)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_x))$, et (u, θ) soit une solution faible du système de Navier-Stokes* (17)–(20)*, avec données initiales u^{in}, θ^{in}, où ν et κ sont déterminés par* (41).

[8] Ces hypothèses techniques sur B sont certainement superflues, mais n'ont pas encore été éliminées.

Ce théorème a une histoire mouvementée, et a nécessité les efforts parallèles de tous les auteurs déjà cités, à partir de la première ébauche par Bardos, Golse et Levermore [BGL3]; dans le paragraphe suivant, nous expliciterons plus précisément les contributions respectives des uns et des autres. L'énoncé ci-dessus est extrait de Golse et Saint-Raymond [GSR]. Dans le cas où une solution faible de (17) est automatiquement forte, la convergence faible peut être remplacée par de la convergence forte sous une hypothèse adéquate sur les données initiales.

Passons enfin à la limite d'Euler incompressible, que l'on ne sait actuellement traiter que par la méthode d'entropie de Yau. Les problèmes qui se posent dans la mise en œuvre de cette méthode ne sont pas tout à fait les mêmes que pour le programme BGL : il n'y a pas besoin de compacité, mais seulement d'estimations d'intégrabilité suffisantes pour majorer les termes d'erreur dans le lemme de Gronwall. En revanche, on retrouve deux difficultés attendues : le besoin apparent de lois de conservation locales, et le manque éventuel de régularité. De façon surprenante, elles peuvent être surmontées toutes les deux : d'une part, les lois de conservation locales exactes ne sont pas toujours nécessaires, comme l'ont prouvé Lions et Masmoudi [LM4]. D'autre part, comme l'a montré Golse [Go, pp. 58–66] la méthode s'accommode très bien du concept de solution dissipative [Li3, Li4], qui permet de contourner les problèmes éventuels de régularité :

Définition 2.11 (Lions). — *Soit $\Omega_x = \mathbb{R}^N$ ou $\mathbb{T}^N$. Un champ de vecteurs $u(t,x) \in C(\mathbb{R}^+; w{-}L^2(\Omega_x))$ est appelé solution dissipative de l'équation d'Euler incompressible* (15), *avec donnée initiale u^{in}, si $\nabla_x \cdot u = 0$, $u(0,\cdot) = u^{in}$, et si, pour tout champ de vecteurs $v(t,x)$ régulier et de divergence nulle, et pour tout $t \geq 0$,*

$$\begin{aligned}\|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \leq \|u^{in} - v(0,\cdot)\|_{L^2}^2 \exp\left(\int_0^t \|\nabla_x v(s,\cdot)\|_{L^\infty}\, ds\right) \\ - \int_0^t \int_{\Omega_x} \exp\left(\int_s^t \|\nabla_x v(\tau,\cdot)\|_{L^\infty}\, d\tau\right) \left[\frac{\partial v}{\partial t} + P(v \cdot \nabla_x v)\right] \cdot (u-v)(s,x)\, dx\, ds.\end{aligned}$$

(pour se convaincre qu'il s'agit bien d'une notion de solution faible, choisir $v =$ solution régulière, $v(0,\cdot) = u^{in}$, et remarquer que le membre de droite s'annule, d'où $u = v$!!)

En regroupant les résultats de [Go] et de [LM4], on parvient au

Théorème 2.12 (Golse, Lions, Masmoudi). — *On suppose $\tau_\varepsilon = \delta_\varepsilon$, $\varepsilon = O(\delta_\varepsilon^\beta)$, $\beta > 1$, et $\Omega_x = \mathbb{T}^N$. On se donne $u^{in} \in L^2(\Omega_x)$, $\nabla_x \cdot u^{in} = 0$, et f_ε^{in} tel que $H(f_\varepsilon^{in} | M_{1,\delta_\varepsilon u^{in},1}) = o(\delta_\varepsilon^2)$. On se donne des solutions g_ε de* (29), *et on suppose en outre*[9] *que la famille $M|v|^2(g_\varepsilon)^2/(2+\delta_\varepsilon g_\varepsilon)$ est relativement compacte dans $w - L^1(dt\,dx\,dv)$. Alors, il existe une suite $\varepsilon_n \to 0$ telle que $g_{\varepsilon_n} \longrightarrow u \cdot v$, où u est solution dissipative de l'équation d'Euler incompressible avec donnée initiale u^{in}.*

[9]Des travaux très récents de Saint-Raymond suggèrent que l'on peut se passer de cette hypothèse.

Remarque 2.13. — Le principal défaut de ce théorème est l'usage de la notion très faible de solution dissipative. Cependant, chaque fois que l'on sait construire une solution forte, suffisamment régulière (solution régulière en temps petit, par exemple), on sait alors qu'il s'agit de l'unique solution dissipative, voir Lions [Li3], ce qui mène à un résultat plus "standard". Dans ce cas, un théorème analogue (aux espaces fonctionnels près...) pourrait être démontré par des méthodes plus traditionnelles de développement de Hilbert tronqué; pour autant, la méthode d'entropie de Yau est en fait plus naturelle et plus satisfaisante.

Remarque 2.14. — La méthode, en l'état actuel des choses, ne permet pas de retrouver d'équation de température telle que (18). À cause de cela, et de l'hypothèse contraignante sur les données initiales, elle donne dans l'étude de la limite de Navier-Stokes, par exemple (voir [Go, GLSR]), des résultats moins performants que la méthode BGL.

2.6. Limite de Navier-Stokes : un canevas de preuve à rendre rigoureux

Nous allons donner ci-après un canevas de preuve informelle (inspiré de Bardos, Golse et Levermore) pour le théorème 2.10, sur la base duquel nous pourrons expliciter plus clairement les difficultés de l'étude; cela permettra en outre au lecteur d'avoir une idée de la façon dont apparaissent les mystérieux coefficients de diffusion (41).

On se limite ici à l'obtention de l'équation sur le champ de vitesses. L'équation (29), dans le changement d'échelles menant à Navier-Stokes, devient

$$\varepsilon \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial t} + v \cdot \nabla_x g_\varepsilon = \frac{1}{M} \frac{Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{\varepsilon^2} = -\frac{\mathcal{L} g_\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{M} Q(M g_\varepsilon, M g_\varepsilon). \tag{42}$$

En multipliant cette équation par ε, en faisant tendre ε vers 0, et en admettant que g_ε converge vers une fonction g, on trouve formellement $\mathcal{L} g = 0$, ce qui entraîne que Mg est une fluctuation de Maxwellienne, eq. (28).

Posons ensuite $q_\varepsilon = (f'_\varepsilon f'_{\varepsilon,*} - f_\varepsilon f_{\varepsilon,*})/(\varepsilon^2 M M_*)$, de sorte que le membre de droite dans (42) peut se réécrire $\int q_\varepsilon M_* B \, dv_* \, d\omega$. Admettant que q_ε converge vers une fonction q quand $\varepsilon \to 0$, on obtient formellement, en passant à la limite dans (42),

$$v \cdot \nabla_x g = \int_{\mathbb{R}^N \times S^{N-1}} q M_* \, B \, dv_* \, d\omega. \tag{43}$$

On intègre cette relation contre M et Mv successivement, pour trouver, grâce à (27),

$$\nabla_x \cdot u = \int q M M_* \, B \, dv \, dv_* \, d\omega,$$

$$\nabla_x (\rho + \theta) = \frac{1}{N} \int q M M_* \, v \, B \, dv \, dv_* \, d\omega.$$

Mais q satisfait les lois de symétrie $q' = -q$, $q_* = q$ par passage à la limite des relations analogues pour q_ε; des considérations élémentaires permettent d'en déduire que les deux intégrales ci-dessus sont nulles. On a donc obtenu formellement la relation d'incompressibilité $\nabla_x \cdot u = 0$, et la relation de Boussinesq (21).

Soit maintenant $u_\varepsilon = \int M g_\varepsilon v \, dv$. Après division de (42) par ε, et intégration contre $M \, v \, dv$, on obtient, grâce à la loi de conservation locale (6) (pour $\xi = v$), l'équation

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_x \cdot \left(\int M \, g_\varepsilon v \otimes v \, dv \right) = 0. \tag{44}$$

En supposant que g_ε converge vers g, le terme de gauche converge, au sens des distributions, vers $\partial u / \partial t$. Reste donc le cœur de la démonstration : prouver que

$$\frac{1}{\varepsilon} \nabla_x \cdot \left(\int M g_\varepsilon v \otimes v \, dv \right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \nabla_x \cdot (u \otimes u) - \nu \Delta_x u + \nabla_x p.$$

Par application du projecteur de Leray P, il suffit de montrer que

$$\frac{1}{\varepsilon} P \nabla_x \cdot \left(\int M g_\varepsilon v \otimes v \, dv \right) \longrightarrow P \nabla_x \cdot (u \otimes u) - \nu P \Delta_x u. \tag{45}$$

Décomposons $v \otimes v$ selon $v \otimes v = (v \otimes v - \frac{|v|^2}{N} I_N) + \frac{|v|^2}{N} I_N$. On peut se débarrasser du deuxième terme, puisque

$$P \nabla_x \cdot \left(I_N \int M g_\varepsilon \frac{|v|^2}{N} \, dv \right) = P \nabla_x \left(\int M g_\varepsilon \frac{|v|^2}{N} \, dv \right) = 0.$$

Combinant cette remarque à la définition (40), il suffit de passer à la limite dans

$$\frac{1}{\varepsilon} P \nabla_x \cdot \left(\int g_\varepsilon \mathcal{L} \phi \, M \, dv \right) = P \nabla_x \cdot \left(\int \left(\frac{\mathcal{L} g_\varepsilon}{\varepsilon} \right) \phi \, M \, dv \right),$$

où l'on a utilisé le caractère auto-adjoint de $\mathcal{L}$ dans $L^2(M \, dv)$.

C'est à ce stade qu'apparaissent les termes de viscosité et de convection : écrivons

$$\frac{\mathcal{L} g_\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{1}{M} \frac{Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{\varepsilon^2} + \frac{1}{M} Q(M g_\varepsilon, M g_\varepsilon). \tag{46}$$

Le premier terme dans le membre de droite de (46) va contribuer à la viscosité : en effet,

$$\int \frac{Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{\varepsilon^2} \phi \, dv = \int q_\varepsilon \phi \, M M_* \, B \, dv \, dv_* \, d\omega \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int q \phi \, M M_* \, B \, dv \, dv_* \, d\omega.$$

Tenant compte de (43) et de (28), cette dernière quantité s'écrit $\int \phi (v \otimes v : \nabla_x u) \, M \, dv$. Par des arguments de symétrie on montre qu'elle est proportionnelle à $\nabla_x u + (\nabla_x u)^T$, un calcul d'algèbre élémentaire indiquant que le coefficient de proportionnalité est ν. D'où

$$\nabla_x \cdot \left(\int \frac{Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{\varepsilon^2} \phi \, dv \right) \longrightarrow \nu \Delta_x u.$$

En revanche, du dernier terme dans (46), quadratique en g, on va tirer un terme de convection. Désignons par Π l'opérateur de projection dans $L^2(M \, dv)$ sur l'espace engendré par $1, v, |v|^2$, et admettons (ce qui est plausible au vu de (28)) que g_ε ressemble asymptotiquement à Πg_ε; notons que le champ de vitesses associé à Πg_ε est toujours u_ε. Une étude simple mêlant algèbre élémentaire et symétries montre que

$$\int \frac{1}{M} Q(M \Pi g_\varepsilon, M \Pi g_\varepsilon) \, \phi \, M \, dv = u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon - \frac{|u_\varepsilon|^2}{N} I_N.$$

Si l'on admet enfin que

$$u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon \longrightarrow u \otimes u, \tag{47}$$

alors on trouve bien, après application du projecteur de Leray,

$$P\nabla_x \cdot \left(\int Q(Mg_\varepsilon, Mg_\varepsilon)\phi \, dv \right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} P\nabla_x \cdot (u \otimes u).$$

Dans cet argument, nous avons fait de nombreuses hypothèses, en particulier de convergence; on peut les justifier presque toutes, mais cette tâche s'avère extrêmement ardue :

(a) toutes les étapes nécessitent des estimations plus ou moins fortes d'intégrabilité sur g_ε, alors que nous ne disposons que des estimations très faibles fournies par les bornes d'entropie. Ainsi, la toute première ligne, eq. (42), n'a aucun sens car on ne sait même pas définir $Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon)$ au sens des distributions; il en est de même de q_ε, et il faut réinterpréter toutes les formules où ce terme apparaît;

(b) la justification des convergences nécessite (au moins) des hypothèses de compacité faible, qui se ramènent également à des bornes d'intégrabilité suffisamment fortes;

(c) la loi de conservation locale (44) n'est pas garantie par la théorie de DiPerna-Lions;

(d) pour passer à la limite selon (47), il faudrait prouver que le champ de vitesses u_ε converge *fortement* vers u. Or, du fait de la présence éventuelle des *ondes acoustiques*, qui se propagent avec une vitesse très élevée (d'ordre $1/\varepsilon$ dans nos échelles macroscopiques), rien ne garantit cette convergence forte ! En fait, si la variable x vit dans le tore plat, on peut même se convaincre qu'il n'y a *pas* convergence forte, de sorte que (47) est irrémédiablement faux...

Les trois premières difficultés ne sont pas seulement propres à la limite de Navier-Stokes, mais se rencontrent dans toutes les limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann. Le concept de solution renormalisée permet de surmonter une partie de (a), au prix d'une grande complexité technique.

Partant de ces principes, dans l'article pionnier [BGL3], Bardos, Golse et Levermore parvenaient à un énoncé satisfaisant sur la limite de Navier-Stokes, modulo cinq problèmes majeurs :

(1) les démonstrations reposant sur les lois de conservation locales, les auteurs étaient amenés à faire l'hypothèse que ces lois étaient satisfaites pour les solutions de DiPerna-Lions, ce que personne ne sait démontrer;

(2) pour éviter le délicat problème du contrôle du flux de chaleur, ils ne considéraient que l'équation de quantité de mouvement, sans chercher à établir l'équation de température;

(3) pour éviter le problème des ondes acoustiques, et le défaut de compacité qui en résulte, ils se limitaient au problème stationnaire en temps;

(4) ils étaient amenés à faire certaines hypothèses de "compacité faible non linéaire" sur la famille (g_ε), en particulier l'équi-intégrabilité de $|v|^2(g_\varepsilon^2)/(2+\varepsilon g_\varepsilon)$, que l'on ne sait pas démontrer;

(5) enfin, les hypothèses faites sur la section efficace étaient très contraignantes, et difficiles à vérifier en pratique sauf dans le cas dit des sections efficaces “Maxwelliennes avec troncature angulaire”.

Toutes ces difficultés ont été résolues dans les quelques dernières années. Tout d’abord, Lions et Masmoudi [LM3] montrèrent comment résoudre le problème (3). À peu près simultanément, Bardos, Golse et Levermore [BGL4, BGL5] montrèrent comment dans certains cas on pouvait se passer de l’hypothèse (1); d’autres arguments furent ensuite proposés par Lions et Masmoudi [LM4], enfin par Golse et Levermore [GL], qui par la même occasion permettaient d’estimer les flux de chaleur (problème (2)), et de traiter des hypothèses beaucoup plus générales sur la section efficace. C’est finalement le problème (4) qui resta ouvert le plus longtemps; sa solution est due à Golse et Saint-Raymond [GSR] (dans sa version actuelle, sous des hypothèses techniques qui cependant restreignent la généralité dans le choix de la section efficace).

Dans les paragraphes 3 à 5, nous allons maintenant exposer de manière plus synthétique les idées-clés de ces diverses contributions.

3. ESTIMATIONS D’ENTROPIE ET CONSÉQUENCES

Les estimations d’entropie vont jouer plusieurs rôles fondamentaux :

(1) la borne d’entropie (38) implique certaines propriétés de compacité faible sur g_ε, comme le montrent Bardos, Golse et Levermore [BGL3];

(2) l’estimation de dissipation d’entropie mènera à l’hypothèse d’équilibre thermodynamique local, par un argument établi dans [BGL3], grandement simplifié dans [GL];

(3) les estimations d’entropie et de dissipation d’entropie combinées vont aussi permettre d’établir que *les lois de conservation locales de quantité de mouvement et d’énergie cinétique sont satisfaites dans la limite de faible nombre de Knudsen*, et cela même si elles ne sont pas satisfaites à nombre de Knudsen fixé.

Parlons plus en détail du point (3), qui est crucial. Le premier résultat de ce type apparaissait dans le récent travail de Bardos, Golse et Levermore [BGL4, BGL5] sur les limites de l’acoustique et de Stokes, et constituait une avancée psychologique majeure. L’argument, basé sur l’annulation d’une mesure de défaut (grâce à une loi de conservation globale pour le modèle limite), nécessitait des hypothèses assez restrictives sur la section efficace, et ne concernait que la conservation de quantité de mouvement. Lions et Masmoudi [LM4] ont alors proposé une autre technique, basée sur la matrice symétrique S dans (35), qui permettait d’une part d’affaiblir les hypothèses pour la limite de Stokes, d’autre part d’étendre le résultat à la limite d’Euler. Finalement, Golse et Levermore [GL] ont suggéré un troisième argument, exploitant mieux les symétries de l’opérateur de Boltzmann, qui s’avère encore plus performant, et permet en outre d’obtenir des équations de température grâce au contrôle du flux d’énergie cinétique. Dans [GL], cet argument est mis en œuvre sur les limites de l'acoustique et de Stokes; dans un travail en préparation de Levermore et Masmoudi, et indépendamment dans [GSR], il est adapté au cas de Navier-Stokes. On notera que les méthodes de Golse et Levermore reposent en partie sur des inégalités élémentaires subtiles ne nécessitant aucun concept mathématique plus avancé que la notion de transformée de Legendre ! Pour en donner un aperçu, commençons par réécrire les estimations d'entropie et de dissipation d'entropie dans un formalisme adéquat.

Lemme 3.1. — Soient $h(z) = (1+z)\log(1+z) - z$, et $d(z) = z\log(1+z)$. Alors,

$$H(f|M) = \int h\left(\frac{f-M}{M}\right) M\,dv\,dx, \tag{48}$$

$$D(f) = \frac{1}{4}\int d\left(\frac{f'f'_* - ff_*}{ff_*}\right) ff_*\,B\,d\omega\,dv\,dv_*. \tag{49}$$

De plus, les fonctions h et d sont convexes et vérifient $h(|z|) \le h(z)$, $d(|z|) \le d(z)$, tandis que leurs transformées de Legendre respectives h^*, d^* satisfont pour $z \ge 0$ et $0 \le \lambda \le 1$,

$$h^*(\lambda z) \le \lambda^2 h^*(z), \qquad d^*(\lambda z) \le \lambda^2 d^*(z), \qquad h^*(z) = O(e^z), \quad d^*(z) = O(e^z).$$

Soit également $s(z) = z^2/(1+z/3)$; on remarque que $s(z) \le h(z)$ pour tout $z \ge -1$. On montre alors le lemme élémentaire [BGL3] :

Lemme 3.2. — Pour $\delta > 0$ assez petit, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tous $g \ge -1/\delta$, $\zeta > 0$, $a \ge \max(\delta, \zeta X)$, $X, Y, Z \ge 0$, les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$X|g| \le \frac{1}{a}h^*(X) + \frac{a}{\delta^2}h(\delta g); \tag{50}$$

$$X\frac{s(\delta g)}{\delta^2} \le C|\log\delta|\left(\frac{h(\delta g)}{\delta^2} + O(e^{\frac{8}{3}X})\right); \tag{51}$$

$$XY|q| \le \frac{aZ}{\zeta^2}d^*\left(\frac{\zeta XY}{a}\right) + \frac{aZ}{\zeta^2}d\left(\frac{\zeta q}{Z}\right) \le \frac{X^2 Z}{a}d^*(Y) + \frac{aZ}{\zeta^2}d\left(\frac{\zeta q}{Z}\right). \tag{52}$$

3.1. Bornes d'entropie et compacité faible

Par application de (50) avec $X = (1+|v|^2)/3$, $\delta = \delta_\varepsilon$ et $g = g_\varepsilon$, et de la borne d'entropie (38), on trouve facilement que la famille g_ε est bornée dans $L^\infty(dt; L^1((1+|v|^2)M\,dv\,dx))$, et relativement compacte dans $w-L^1(dt; w-L^1((1+|v|^2)\,M\,dv))$. Comme $s \le h$, il existe une constante numérique C telle que

$$\int \frac{g_\varepsilon^2}{2+\delta_\varepsilon g_\varepsilon} M\,dv\,dx \le C\frac{H(f_\varepsilon|M)}{\delta_\varepsilon^2} \le CC^{in}. \tag{53}$$

En outre, grâce à (51) il existe une constante numérique C telle que

$$\int |v|^2\,\frac{g_\varepsilon^2}{2+\delta_\varepsilon g_\varepsilon} M\,dv\,dx \le C|\log\delta_\varepsilon|\left[\frac{H(f_\varepsilon|M)}{\delta_\varepsilon^2} + 1\right] \le C(C^{in}+1)|\log\delta_\varepsilon|. \tag{54}$$

3.2. Symétrisation et estimation de dissipation d'entropie

Dans l'étape suivante, on quantifie de manière ad hoc l'idée que l'intégrande $f'f'_* - ff_*$ ressemble, asymptotiquement quand $\varepsilon \to 0$, à sa version linéarisée $MM_*(g' + g'_* - g - g_*)$.

Lemme 3.3. — On pose $q_\varepsilon = (f'_\varepsilon f'_{\varepsilon,*} - f_\varepsilon f_{\varepsilon,*})/(\sqrt{\varepsilon\tau_\varepsilon}\delta_\varepsilon MM_*)$, et $N_\varepsilon = 1 + \delta_\varepsilon g_\varepsilon/3$. Alors,

$$\left\| \frac{q_\varepsilon}{N_\varepsilon N_{\varepsilon,*} N'_\varepsilon N'_{\varepsilon,*}} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\tau_\varepsilon}} \left(\frac{g'_\varepsilon}{N'_\varepsilon} + \frac{g'_{\varepsilon,*}}{N'_{\varepsilon,*}} - \frac{g_\varepsilon}{N_\varepsilon} - \frac{g_{\varepsilon,*}}{N_{\varepsilon,*}} \right) \right\| \leq CC^{in} \frac{\delta_\varepsilon |\log \delta_\varepsilon|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\varepsilon\tau_\varepsilon}}, \tag{55}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme dans $L^\infty(dt; L^1(dx; L^2(MM_*\, B\, d\omega\, dv\, dv_*)))$.

Esquisse de preuve. — Par un calcul facile, le membre de gauche vaut $F' - F$, avec

$$F = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{N'_{\varepsilon,*} N'_\varepsilon} + \frac{1}{N'_{\varepsilon,*}} + \frac{1}{N'_\varepsilon} - 2 \right) \frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon\tau_\varepsilon}} \frac{g_{\varepsilon,*} g_\varepsilon}{N_{\varepsilon,*} N_\varepsilon}. \tag{56}$$

Les termes entre parenthèses se majorent par une constante numérique, et l'on parvient au résultat en combinant les bornes d'entropie (53) (54) avec l'inégalité

$$\int \left(\frac{g_{\varepsilon,*} g_\varepsilon}{N_{\varepsilon,*} N_\varepsilon} \right)^2 M\, M_*\, (1 + |v - v_*|^2)\, dv\, dv_* \leq C \left(\int \frac{(1 + |v|^2) g_\varepsilon^2}{N_\varepsilon^2} M\, dv \right) \left(\int \frac{g_\varepsilon^2}{N_\varepsilon^2} M\, dv \right).$$

□

3.3. Equilibre thermodynamique local

Lemme 3.4. — Avec les notations précédentes, il existe une constante numérique C telle que

$$\int \frac{q_\varepsilon^2}{N_\varepsilon N_{\varepsilon,*} N'_\varepsilon N'_{\varepsilon,*}} M\, M_*\, B\, d\omega\, dv\, dv_*\, dx\, dt \leq C \frac{D(f)}{\varepsilon\tau_\varepsilon\delta_\varepsilon^2} \leq CC^{in}. \tag{57}$$

Preuve. — C'est une conséquence directe des inégalités élémentaires $(N_\varepsilon N_{\varepsilon,*} N'_\varepsilon N'_{\varepsilon,*})^{-1} \leq (81/4) MM_*/(f'_\varepsilon f'_{\varepsilon,*} + f_\varepsilon f_{\varepsilon,*})$, $z^2/(1 + z/2) \leq d(z)$ (pour $z \geq -1$) et de (49). □

Proposition 3.5. — *Soit g une valeur d'adhérence de la famille (g_ε) quand $\varepsilon \to 0$. Alors g vérifie* (28)*, où $\rho, u, \theta \in L^\infty(dt; L^2(dx))$.*

Esquisse de preuve. — Par un théorème classique, il suffit de montrer que

$$g' + g'_* - g - g_* = 0. \tag{58}$$

Quitte à extraire une sous-suite, on suppose que $g_\varepsilon \longrightarrow g$ faiblement. Par l'inégalité élémentaire $|g_\varepsilon - g_\varepsilon/N_\varepsilon| \leq C\delta_\varepsilon g_\varepsilon^2/N_\varepsilon$ et la borne d'entropie (53), on voit que $g_\varepsilon/N_\varepsilon$ converge faiblement vers g. On multiplie alors (55) par $\sqrt{\varepsilon\tau_\varepsilon}$, et on passe à la limite quand $\varepsilon \to 0$. Le terme en q_ε disparaît à la limite au vu du lemme 3.4, et on trouve finalement (58). □

Une fois ce lemme établi, on se ramène par extraction au cas où $g_\varepsilon \longrightarrow g$ faiblement.

3.4. Lois de conservation approchées

Voyons maintenant comment utiliser les bornes d'entropie pour établir des lois de conservation asymptotiques. Nous allons nous limiter ici à un exemple de contrôle de la contribution des collisions; cependant, mentionnons bien que les bornes d'entropie servent aussi de manière cruciale dans [GL] pour contrôler les *flux* de quantité de mouvement et d'énergie cinétique, avec les lemmes 3.2 et 3.3 comme outils-clés.

PROPOSITION 3.6. — *Soit ξ un invariant de collision : $\xi(v) = 1, v_j$ $(1 \leq j \leq N)$ ou $|v|^2$, et soit $\alpha > 0$. Alors, avec les notations précédentes, on a, pour $p = 1, 2$,*

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\tau_\varepsilon}\delta_\varepsilon}\left|\int \frac{Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{(1+\alpha\delta_\varepsilon g_\varepsilon)^p}\xi(v)\,dv\right| \leq C\left(\frac{H(f_\varepsilon|M)}{\delta_\varepsilon^2} + \frac{D(f_\varepsilon)}{\varepsilon\tau_\varepsilon\delta_\varepsilon^2} + 1\right)\left(\delta_\varepsilon|\log\delta_\varepsilon|^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\varepsilon\tau_\varepsilon}\delta_\varepsilon|\log\delta_\varepsilon|\right),$$

où C est une constante dépendant uniquement de α et de N.

ESQUISSE DE PREUVE. — Considérons par exemple le cas $p = 1$, $\alpha = 1/3$: la quantité à estimer peut se réécrire $\int MM_*B\xi\frac{q_\varepsilon}{N_\varepsilon}$. En utilisant les symétries de l'opérateur de collision et le fait que ξ soit un invariant de collision, on trouve que cette quantité vaut

$$\frac{1}{3}\int MM_*B\xi\frac{\delta_\varepsilon g_{\varepsilon,*}}{N_{\varepsilon,*}N_\varepsilon}q_\varepsilon - \frac{2}{9}\int MM_*B\xi'\frac{\delta_\varepsilon^2 g_{\varepsilon,*}g'_{\varepsilon,*}}{N_\varepsilon N_{\varepsilon,*}N'_\varepsilon N'_{\varepsilon,*}}q_\varepsilon + \frac{1}{6}\int MM_*B\xi\frac{\sqrt{\varepsilon\tau_\varepsilon}\delta_\varepsilon q_\varepsilon^2}{N_\varepsilon N_{\varepsilon,*}N'_\varepsilon N'_{\varepsilon,*}}. \tag{59}$$

On estime alors chacun des trois termes séparément. Les deux premiers se majorent en $O(\delta_\varepsilon|\log\delta_\varepsilon|^{\frac{1}{2}})$, le dernier en $O(\sqrt{\varepsilon\tau_\varepsilon}\delta_\varepsilon|\log(\sqrt{\varepsilon\tau_\varepsilon}\delta_\varepsilon)|)$, avec des constantes faisant intervenir les fonctionnelles d'entropie et de dissipation d'entropie. Contentons-nous ici de majorer le premier terme : il suffit de prouver

$$\left|\int \frac{(1+|v|^2)\delta_\varepsilon g_{\varepsilon,*}q_\varepsilon}{N_\varepsilon N_{\varepsilon,*}}\,M\,M_*\,B\,d\omega\,dv\,dv_*\right| \leq C\left(\frac{H(f_\varepsilon|M)}{\delta_\varepsilon^2} + \frac{D(f_\varepsilon)}{\varepsilon\tau_\varepsilon\delta_\varepsilon^2} + 1\right)\delta_\varepsilon|\log\delta_\varepsilon|^{\frac{1}{2}}.$$

Pour cela on applique l'inégalité (52) avec

$$q = q_\varepsilon, \quad X = \frac{|g_{\varepsilon,*}|}{N_\varepsilon N_{\varepsilon,*}}, \quad Y = \frac{1+|v|^2}{3}, \quad Z = \frac{f_\varepsilon f_{\varepsilon,*}}{MM_*}, \quad \zeta = \sqrt{\varepsilon\tau_\varepsilon}\delta_\varepsilon,$$

et on intègre en v, v_*, ω contre B. En utilisant $\int e^{(1+|v|^2)/3}(1+|v|^2)\,M\,dv < +\infty$, et les inégalités $f_\varepsilon/N_\varepsilon \leq 3M/\delta$, $f_{\varepsilon,*}/N_{\varepsilon,*} \leq 3M_*/\delta$, on parvient à une majoration en

$$C\delta_\varepsilon\left(\frac{1}{a\delta_\varepsilon^2}\int\frac{g_{\varepsilon,*}^2}{N_*}(1+|v_*|^2)\,M_*\,dv_* + a\frac{D(f_\varepsilon)}{\varepsilon\tau_\varepsilon\delta_\varepsilon^2}\right),$$

et il ne reste qu'à appliquer (54) et à optimiser en a pour conclure.

Les autres cas se traitent de même, par des estimations de plus en plus complexes. $\square$

4. COMPACITÉ FORTE CONDITIONNELLE POUR NAVIER-STOKES

Les estimations du paragraphe précédent, combinées à des techniques classiques et à un usage adroit de la notion de solution renormalisée, sont suffisantes pour traiter les limites de l'acoustique et de Stokes [GL]. Il n'en va pas de même pour la limite de Navier-Stokes : d'une part, le contrôle des lois de conservation doit être affiné; mais surtout, la présence du terme de convection quadratique, $\nabla_x \cdot (u \otimes u)$, rend nécessaire l'utilisation d'une certaine forme de convergence forte (convergence en norme). Rappelons en effet que si u_ε, famille bornée de $L^2(\mathbb{R}^m)$, converge faiblement vers u sans converger fortement, alors $u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon$ *ne converge pas* vers $u \otimes u$ au sens des distributions.

Le critère de Riesz-Fréchet-Kolmogorov [Br] permet de traduire une propriété de compacité forte en termes de "régularité". Plus précisément, soit (u_ε) bornée dans L^2 et vérifiant la condition de "non-fuite à l'infini" $\lim_{R\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon\|_{L^2(|x|\geq R)} = 0$; alors la famille (u_ε) est fortement relativement compacte dans $L^2(\mathbb{R}^m)$ si et seulement si

$$\lim_{y\to 0} \limsup_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon(\cdot + y) - u_\varepsilon\|_{L^2} = 0. \tag{60}$$

Ce point de vue permet de séparer le problème de compacité forte dans la limite de Navier-Stokes en deux sous-problèmes : compacité forte (ou régularité) par rapport à la variable x; et compacité forte par rapport à la variable t. Nous allons voir comment ces deux problèmes peuvent être résolus, à condition de pouvoir établir des estimations d'*intégrabilité* suffisantes (c'est en ce sens qu'il s'agit de compacité forte *conditionnelle*). Dans ce paragraphe, on considère des solutions de (42), où $\Omega_x = \mathbb{R}^N$; l'analyse est identique pour $\Omega_x = \mathbb{T}^N$.

4.1. Compacité forte en espace

Cette première difficulté a été résolue par Bardos, Golse et Levermore [BGL3] grâce aux **lemmes de moyenne cinétiques**. Introduits par Golse et al. [GPS, GLPS], améliorés et généralisés par de nombreux auteurs, ces lemmes donnent des estimations de régularité dans les variables (t, x) pour les solutions de certaines équations cinétiques après moyennisation par rapport à la variable v. Ils constituent l'un des outils-clés de la théorie de DiPerna-Lions et ses extensions, et plus généralement de toute la théorie cinétique moderne (pour une introduction et de nombreuses références, voir Bouchut [Bo]). Dans notre contexte, l'énoncé utile est fourni par le

Lemme 4.1. — 1. Soit (h_ε) une famille de solutions de

$$\varepsilon \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial t} + v \cdot \nabla_x h_\varepsilon = S_\varepsilon, \qquad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad v \in \mathbb{R}^N, \tag{61}$$

où $\varepsilon \leq 1$, $h_\varepsilon(t,x,v)$ et $S_\varepsilon(t,x,v)$ sont bornées dans $L^2(dt\,dx\,M\,dv)$. Alors, pour toute fonction-test $\varphi(v)$, C^∞ à support compact, il existe une constante $C = C(\varphi, N)$, telle que

$$\left\| \int h_\varepsilon(\cdot,\cdot,v)\,\varphi(v)\,M\,dv \right\|_{L^2((0,T);H^{1/2}(\mathbb{R}^N_x))} \leq C\big(\|h_\varepsilon\|_{L^2} + \|S_\varepsilon\|_{L^2}\big).$$

Ici l'espace de Sobolev fractionnaire $H^{1/2}$ est défini via la transformée de Fourier par $\|u\|^2_{H^{1/2}} = \int (1+|\xi|)|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi$, où $\widehat{u}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}u(x)\,dx$.

2. Avec les mêmes notations, supposons la famille (h_ε) faiblement relativement compacte dans $L^1(dt\,dx\,M\,dv)$ et (S_ε) bornée dans $L^1(dt\,dx\,M\,dv)$. Alors (h_ε) est fortement compacte en x, au sens où pour toutes fonctions $\psi(t)$ et $\varphi(v)$, C^∞ à support compact,

$$\lim_{y\to 0}\limsup_{\varepsilon\to 0} \left\| \psi(\cdot) \int \varphi(v)\Big(h_\varepsilon(\cdot,\cdot+y,v) - h_\varepsilon(\cdot,\cdot,v)\Big)\,M\,dv \right\|_{L^1((0,T)\times\mathbb{R}^N_x)} = 0. \tag{62}$$

Remarque 4.2. — Bien sûr, à cause du facteur ε qui apparaît dans l'équation (61), on ne peut espérer aucune régularisation (uniforme en ε) par rapport à la variable t.

Esquisse de preuve. — La preuve de 1., basée sur la transformée de Fourier, est une variante facile de celles que l'on trouve dans [Ge1] ou [GLPS]. L'énoncé 2., dû à Golse et Saint-Raymond, se démontre par une variante de la stratégie de [GLPS] : on écrit

$$\varepsilon\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial t} + v\cdot\nabla_x h_\varepsilon + \lambda h_\varepsilon = S_\varepsilon + \lambda h_\varepsilon, \tag{63}$$

où $\lambda > 0$ sera choisi plus tard. On définit $R^\lambda_\varepsilon = (\varepsilon\partial_t + v\cdot\nabla_x + \lambda)^{-1}$, dont on vérifie que la norme $L^1 \to L^1$ est $1/\lambda$. Introduisant un paramètre de troncature $\alpha > 0$, on écrit alors

$$h_\varepsilon = R^\lambda_\varepsilon(S_\varepsilon) + \lambda R^\lambda_\varepsilon(h_\varepsilon 1_{h_\varepsilon \geq \alpha}) + \lambda R^\lambda_\varepsilon(h_\varepsilon 1_{h_\varepsilon \leq \alpha}).$$

Estimons chacun des trois termes apparaissant au membre de droite. La norme L^1 du premier est bornée en $O(1/\lambda)$; par compacité faible de (h_ε), la norme L^1 du deuxième, pour λ fixé, est arbitrairement petite pour α assez grand; enfin, il résulte facilement de la partie 1 du lemme que, pour α et λ fixés, le troisième terme est borné dans $L^2((0,T);H^{1/2}(\mathbb{R}^N_x))$. La conclusion s'ensuit par des arguments simples de régularisation. □

En l'absence d'estimations sur le membre de droite dans (42), il est impossible d'appliquer directement le lemme 4.1 avec $h_\varepsilon = g_\varepsilon$. On utilise donc la définition des solutions renormalisées : on pose $h_\varepsilon = \beta_\varepsilon(g_\varepsilon)$, de sorte que h_ε satisfait l'équation

$$\varepsilon\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial t} + v\cdot\nabla_x h_\varepsilon = \beta'_\varepsilon(g_\varepsilon)\frac{Q(f_\varepsilon,f_\varepsilon)}{\varepsilon^2 M} \equiv S_\varepsilon.$$

On choisit la fonction $\beta_\varepsilon(g_\varepsilon)$ de la forme $\tilde{g}_\varepsilon = g_\varepsilon\gamma(\varepsilon g_\varepsilon)$, où γ est une fonction C^∞ à support compact dans $[-1,1]$, identiquement égale à 1 dans un voisinage de 0 ($\tilde{g}_\varepsilon$ est donc une approximation de g_ε, tronquée à hauteur $1/\varepsilon$). Les estimations fournies par l'entropie sont suffisantes pour que l'on puisse appliquer le lemme 4.1 à la famille (h_ε), et également remplacer $\varphi(v)$ dans (62) par v, grâce au contrôle des grandes vitesses. Posons

$$\tilde{u}_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} M\tilde{g}_\varepsilon v\, dv, \tag{64}$$

on montre ainsi l'estimation de *compacité forte en* x sur le champ de vitesses $\tilde{u}_\varepsilon(t,x)$:

$$\lim_{y\to 0}\limsup_{\varepsilon\to 0}\left\|\tilde{u}_\varepsilon(\cdot,\cdot+y)-\tilde{u}_\varepsilon\right\|_{L^1((0,T)\times\mathbb{R}^N_x)} = 0. \tag{65}$$

Si l'on pouvait combiner ce renseignement avec une estimation de compacité faible, ou d'intégrabilité, telle que

$$(1+|v|^2)\frac{g_\varepsilon^2}{2+\varepsilon g_\varepsilon} \text{ est une famille relativement compacte dans } w-L^1(M\,dv\,dx\,dt), \tag{66}$$

il s'ensuivrait facilement que $(\tilde{u}_\varepsilon)$ est fortement relativement compacte en x dans L^2 :

$$\lim_{y\to 0}\limsup_{\varepsilon\to 0}\left\|\tilde{u}_\varepsilon(\cdot,\cdot+y)-\tilde{u}_\varepsilon\right\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N_x)} = 0. \tag{67}$$

On démontrerait de même la compacité en x pour les autres moments $\tilde{\rho}_\varepsilon$ et $\tilde{\theta}_\varepsilon$ de $\tilde{g}_\varepsilon$.

4.2. Compacité en temps : les ondes acoustiques

La compacité par rapport à la variable de temps pose un problème plus délicat. En effet, dans une asymptotique de faible nombre de Mach, on peut s'attendre à rencontrer des phénomènes de propagation à très grande vitesse ($O(1/\varepsilon)$ dans notre choix d'échelles macroscopiques) : il s'agit des *ondes acoustiques*.

La même difficulté est présente dans le problème plus simple et plus classique de la *limite incompressible du système de Navier-Stokes compressible*, étudiée dans les années 80 par Klainerman et Majda [KM]; de ce fait, les résultats de Klainerman et Majda étaient restés incomplets. Le remède est venu des travaux indépendants de Grenier [Gre] et Schochet [Sc] sur les fluides tournants, dans les années 90. Grenier et Schochet ont montré comment, dans certains problèmes asymptotiques, "filtrer" des oscillations de très haute fréquence par un changement de référentiel adéquat. Ces idées ont ensuite été adaptées au problème de la limite incompressible dans [LM1, DGLM] et d'autres articles.

Très récemment, Lions et Masmoudi [LM2] ont proposé une variante astucieuse de ces méthodes de filtrage. Sans atteindre la généralité des techniques de [Gre, Sc] (qui s'appliquent à de nombreux autres problèmes que les limites incompressibles), leur approche, basée sur des lois de conservation locales plutôt que sur un changement de référentiel, s'avère plus simple, plus souple, et suffisamment robuste pour être adaptée au programme BGL. Par rapport à (47), les conclusions vont différer sur deux points : d'une part, au lieu de considérer $u_\varepsilon\otimes u_\varepsilon$ on va considérer sa version tronquée, $\tilde{u}_\varepsilon\otimes\tilde{u}_\varepsilon$. D'autre part, on ne va pas montrer $\nabla_x\cdot(\tilde{u}_\varepsilon\otimes\tilde{u}_\varepsilon)\longrightarrow\nabla_x\cdot(u\otimes u)$, mais seulement

$$P\nabla_x\cdot(\tilde{u}_\varepsilon\otimes\tilde{u}_\varepsilon)\longrightarrow P\nabla_x\cdot(u\otimes u) \tag{68}$$

(on rappelle que P désigne le projecteur de Leray). C'est donc modulo un terme gradient que l'on prouve la limite escomptée. On démontre en même temps

$$\nabla_x \cdot (\tilde{u}_\varepsilon \tilde{\theta}_\varepsilon) \longrightarrow \nabla_x \cdot (u\theta). \tag{69}$$

Les limites (68) et (69) sont assez remarquables, puisqu'elles ne nécessitent pas de compacité forte ! Elles reposent sur le lemme suivant.

Lemme 4.3 (Lions, Masmoudi). — Soient $\tilde{\rho}_\varepsilon$, $\tilde{u_\varepsilon}$, $\tilde{\theta}_\varepsilon$ des familles bornées dans $L^\infty((0,T); L^2(\mathbb{R}^N_x))$, fortement compactes dans la variable x au sens de (67), et convergeant faiblement au sens des distributions vers ρ, u, θ respectivement. On suppose que $\partial_t P\tilde{u}_\varepsilon$ et $\partial_t(\frac{N}{N+2}\tilde{\theta}_\varepsilon - \frac{2}{N+2}\tilde{\rho}_\varepsilon)$ sont bornées dans $L^1_{\mathrm{loc}}(dt; X)$, où X est un espace de distributions (disons, un espace de Sobolev négatif $W^{-s,k}_{\mathrm{loc}}$, $s \geq 0$, $k \geq 1$) et que

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial t} + \nabla_x(\tilde{\rho}_\varepsilon + \tilde{\theta}_\varepsilon) = F_\varepsilon, \\ \\ \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t}(\tilde{\rho}_\varepsilon + \tilde{\theta}_\varepsilon) + \dfrac{N+2}{N} \nabla_x \cdot \tilde{u}_\varepsilon = G_\varepsilon, \end{cases} \tag{70}$$

où $F_\varepsilon, G_\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $L^1((0,T); H^{-s}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N_x))$ pour un certain $s \geq 0$. Alors les limites (68), (69) sont vérifiées au sens des distributions.

Remarque 4.4. — Cet énoncé est dans le même esprit que les théorèmes dits de "compacité par compensation", au sens où l'on prouve la convergence de certaines quantités quadratiques formées à partir des fonctions $(\tilde{\rho}_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon, \tilde{\theta}_\varepsilon)$ sous l'hypothèse que certaines combinaisons des dérivées de ces fonctions convergent fortement (en t) vers 0.

Esquisse de preuve. — Montrons que la limite (68) est vraie, l'autre se traitant de la même manière. Tout d'abord, puisque $P\tilde{u}_\varepsilon$ est une famille compacte en x, et que $\partial_t P\tilde{u}_\varepsilon$ est bornée dans $L^1_{\mathrm{loc}}(dt; X)$, on peut montrer (lemme d'Aubin-Lions; Cf. par exemple [Li4, lemme 5.1]) que $P\tilde{u}_\varepsilon$ est une famille compacte dans $L^2_{\mathrm{loc}}(dt\,dx)$. On en déduit que $P\tilde{u}_\varepsilon \longrightarrow Pu = u$ dans $L^2_{\mathrm{loc}}(dt\,dx)$. Décomposons $\tilde{u}_\varepsilon$ selon $\tilde{u}_\varepsilon = P\tilde{u}_\varepsilon + \nabla_x \pi_\varepsilon$, de sorte que $P\tilde{u}_\varepsilon$ converge fortement vers u dans L^2 et $\nabla_x \pi_\varepsilon$ converge faiblement vers 0 dans L^2. Il s'ensuit

$$P\nabla_x \cdot (\tilde{u}_\varepsilon \otimes \tilde{u}_\varepsilon) - P\nabla_x \cdot (\nabla_x \pi_\varepsilon \otimes \nabla_x \pi_\varepsilon) \longrightarrow P\nabla_x \cdot (u \otimes u),$$

et il ne nous reste donc plus qu'à montrer

$$P\nabla_x \cdot \big(\nabla_x \pi_\varepsilon \otimes \nabla_x \pi_\varepsilon\big) \longrightarrow 0. \tag{71}$$

On se ramène ensuite par approximation au cas où les fonctions en jeu sont régulières en x. En effet, la suite $(\tilde{u}_\varepsilon)$ étant compacte par rapport à la variable x (formule (67)), il en résulte que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N_x$,

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \big\| \tilde{u}_\varepsilon *_x \zeta_\delta - \tilde{u}_\varepsilon \big\|_{L^2((0,T)\times K)} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0,$$

où ζ_δ désigne une approximation de l'identité au sens de la convolution : $\zeta_\delta(x) = \delta^{-N}\zeta(x/\delta)$, ζ étant une fonction C^∞ à support compact, positive et d'intégrale unité. En conséquence,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \big\|(\nabla_x \pi_\varepsilon) * \zeta_\delta - \nabla_x \pi_\varepsilon\big\|_{L^2((0,T)\times K)} \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0,$$

et de même

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \big\|(\tilde\rho_\varepsilon + \tilde\theta_\varepsilon) * \zeta_\delta - (\tilde\rho_\varepsilon + \tilde\theta_\varepsilon)\big\|_{L^2((0,T)\times K)} \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0.$$

Il s'ensuit que $(\nabla_x\pi_\varepsilon * \zeta_\delta) \otimes (\nabla_x \pi_\varepsilon * \zeta_\delta) - \nabla_x\pi_\varepsilon \otimes \nabla_x \pi_\varepsilon$ converge vers 0 dans L^1_{loc} quand $\delta \to 0$, et ce uniformément en ε. Il est donc suffisant de montrer que pour $\delta > 0$ fixé,

$$P\nabla_x \cdot \big((\nabla_x \pi_\varepsilon * \zeta_\delta) \otimes (\nabla_x\pi_\varepsilon * \zeta_\delta)\big) \longrightarrow 0. \tag{72}$$

Notons $\pi_\varepsilon^\delta = \pi_\varepsilon * \zeta_\delta$, $\beta_\varepsilon^\delta = (\tilde\rho_\varepsilon + \tilde\theta_\varepsilon) * \zeta_\delta$. Du système (70) on tire, par application de $\mathrm{Id} - P$ à la première équation et par convolution,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \nabla_x \pi_\varepsilon^\delta}{\partial t} + \dfrac{1}{\varepsilon}\nabla_x \beta_\varepsilon^\delta = \dfrac{F_\varepsilon^\delta}{\varepsilon}, \\[2ex] \dfrac{\partial \beta_\varepsilon^\delta}{\partial t} + \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{N+2}{N}\Delta_x \pi_\varepsilon^\delta = \dfrac{G_\varepsilon^\delta}{\varepsilon}, \end{cases} \tag{73}$$

où F_ε^δ, G_ε^δ convergent vers 0 dans $L^1((0,T); H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))$ pour tout $s \geq 0$ (grâce à l'action régularisante de la convolution). Vient maintenant le cœur de l'argument : par un calcul simple, on déduit de (73) l'astucieuse identité remarquable

$$\begin{aligned} &\nabla_x \cdot \Big(\nabla_x \pi_\varepsilon^\delta \otimes \nabla_x \pi_\varepsilon^\delta\Big) \\ &\quad = \frac{1}{2}\nabla_x\Big(|\nabla_x \pi_\varepsilon^\delta|^2 - \frac{N}{N+2}(\beta_\varepsilon^\delta)^2\Big) + \frac{N}{N+2}\Big(F_\varepsilon^\delta \beta_\varepsilon^\delta + G_\varepsilon^\delta \nabla_x\pi_\varepsilon^\delta - \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \beta_\varepsilon^\delta \nabla_x \pi_\varepsilon^\delta)\Big). \end{aligned} \tag{74}$$

En outre, β_ε^δ et $\nabla_x \pi_\varepsilon^\delta$ sont bornés dans $L^\infty(dt; L^2(\mathbb{R}^N_x))$; il s'ensuit que $F_\varepsilon^\delta \beta_\varepsilon^\delta$, $G_\varepsilon^\delta \nabla_x \pi_\varepsilon^\delta$ et $\varepsilon\beta_\varepsilon^\delta \nabla_x\pi_\varepsilon^\delta$ convergent fortement vers 0 dans $L^1((0,T); H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N_x))$ quand $\varepsilon \to 0$. Les trois derniers termes du membre de droite dans (74) convergent donc vers 0 au sens des distributions. Après élimination du terme de gradient par application de P, on conclut donc à (72). $\square$

Reste à se convaincre que le lemme 4.3 s'applique à la limite de Boltzmann vers Navier-Stokes. C'est ce que vérifient Lions et Masmoudi [LM3] au terme de quelques calculs simples qui suivent les étapes du canevas de preuve fourni au paragraphe 2.6, ainsi que les estimations d'entropie de Bardos, Golse et Levermore, et l'hypothèse (66). Notons en particulier que les bornes $L^\infty_t(L^2_x)$ sur $\tilde\rho_\varepsilon$, $\tilde u_\varepsilon$, $\tilde\theta_\varepsilon$ découlent de $(\int |\tilde g_\varepsilon||v|^p\, M\, dv)^2 \leq (\int (\tilde g_\varepsilon)^2\, M\, dv)(\int |v|^{2p}\, M\, dv) \leq C\times$ (membre de droite dans (53)).

Remarque 4.5. — Finalement, la convergence de $(\tilde u_\varepsilon)$ est-elle faible ou forte ? Ce point n'a pas été étudié de près; dans le cas de la limite de faible nombre de Mach du système de Navier-Stokes compressible, on sait qu'il dépend de la géométrie globale du problème (au contraire du lemme 4.3, purement local). La limite est, en général, localement forte si les équations sont posées dans l'espace tout entier, ou dans un ouvert borné (générique), voir Desjardins et Grenier [DG], Desjardins et al. [DGLM]. L'interprétation physique est la suivante : dans l'espace tout entier, les ondes acoustiques se dispersent à l'infini, ce qui peut se traduire mathématiquement par des estimations à la Strichartz; en revanche, dans un ouvert borné, l'énergie associée aux ondes acoustiques est dissipée par la viscosité du fluide, au voisinage du bord de l'ouvert. Il n'en va pas de même quand l'équation est posée sur une variété compacte sans bord telle que le tore plat — ou bien dans une boule : alors, la convergence est seulement faible.

5. GAIN DE COMPACITÉ FAIBLE POUR NAVIER-STOKES

En combinant les contributions [BGL3, LM4] et la méthode de [GL], il devenait finalement possible [LeMa] de prouver le théorème 2.10 [10] sous la condition d'obtenir une borne d'équi-intégrabilité de la forme (66). Cependant, à ce jour, cette estimation reste encore un problème ouvert... Pour le contourner, dans un manuscrit achevé tout récemment [GSR], Golse et Saint-Raymond ont introduit une nouvelle stratégie, qui les a menés à prouver des estimations plus faibles que (66), mais suffisantes pour conclure (en dimension $N = 3$ du moins). L'ensemble de la preuve s'inspire d'un travail antérieur de Saint-Raymond [SR] sur l'équation de BGK, un modèle simplifié que l'on utilise parfois en remplacement de l'équation de Boltzmann. Pour rendre justice au travail effectué dans [GSR], un exposé complet serait nécessaire; nous allons nous contenter ici de quelques lignes pour expliquer les principales idées mises en œuvre.

Une première amélioration importante concerne le bon usage de l'estimation de *dissipation d'entropie*. Sachant que $D(f_\varepsilon) = 0$ si et seulement si f_ε est une Maxwellienne locale, on peut espérer que l'estimation a priori sur $\varepsilon^{-4}D(f_\varepsilon)$ dans $L^1(dt\,dx)$ permette de contrôler assez finement l'écart entre f_ε et l'ensemble des Maxwelliennes locales, ce qui serait très prometteur : en effet, il serait facile de prouver (66) si f_ε était une Maxwellienne locale ! En fait, l'obtention de bornes précises sur $H(f|M_{R,U,T})$ en fonction de $D(f)$ est un problème classique qui a reçu beaucoup d'attention récemment pour ses applications dans l'étude de versions quantitatives du Théorème H (voir [Vi]). Cependant, sauf à faire des hypothèses encore beaucoup plus fortes que (66), il y a des obstructions mathématiques à un contrôle aussi bon qu'on le souhaiterait. Pour cette raison, dans [GSR] on ne retient qu'un contrôle très faible, même si fort astucieux : grâce à la formule de Jensen appliquée à la fonction convexe $(X, Y) \longmapsto (X - Y)(\log X - \log Y)$,

$$D(f_\varepsilon) \geq R_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N_v} \left(\frac{\mathcal{Q}^+(f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{R_\varepsilon} - f_\varepsilon \right) \left(\log \frac{\mathcal{Q}^+(f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{R_\varepsilon} - \log f_\varepsilon \right) dv, \tag{75}$$

[10] En fait une version plus générale, les hypothèses sur la section efficace étant moins contraignantes.

où $\mathcal{Q}^+$ est la partie positive d'un opérateur de Boltzmann artificiel,

$$\mathcal{Q}^+(f,f) = \int f' f'_* \, b(v-v_*,\omega)\, dv_*\, d\omega,$$

$b(v-v_*,\omega) = K|\cos(v-v_*,\omega)|^{N-2}$, K étant une constante de normalisation assurant que $\int b(k\cdot\omega)d\omega = 1$ pour tout vecteur unitaire k. Notons que $\mathcal{Q}^+$ n'agit que sur la variable de vitesse, et que $\mathcal{Q}^+(f_\varepsilon, f_\varepsilon)/R_\varepsilon = f_\varepsilon$ si et seulement si f_ε est une Maxwellienne locale; en ce sens l'estimation (75) contrôle bien l'écart entre f_ε et l'ensemble des Maxwelliennes locales.

La stratégie de Golse et Saint-Raymond passe donc par la décomposition

$$g_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(f_\varepsilon - M) = \frac{1}{\varepsilon}\left(f_\varepsilon - \frac{\mathcal{Q}^+(\tilde{f}_\varepsilon,\tilde{f}_\varepsilon)}{\tilde{R}_\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\mathcal{Q}^+(\tilde{f}_\varepsilon,\tilde{f}_\varepsilon)}{\tilde{R}_\varepsilon} - M\right), \tag{76}$$

où $\tilde{f}_\varepsilon = M(1+\varepsilon\tilde{g}_\varepsilon)$, et $\tilde{g}_\varepsilon$ est une troncature de g_ε à hauteur $1/\varepsilon$, comme dans les paragraphes précédents. Après avoir contrôlé le premier terme de cette décomposition par l'estimation de dissipation d'entropie, il reste à établir des bornes a priori d'intégrabilité adéquates sur le second. Celles-ci vont découler de la structure particulière de l'opérateur $\mathcal{Q}^+$, dont les propriétés régularisantes ont été étudiées par Grad [Gr3] et Caflisch [Ca1] dans un cadre linéaire, Lions et d'autres auteurs dans un cadre non linéaire (voir la revue dans [Vi]). En l'occurrence, le point important est que (pour $N=3$) $M^{-1/2}\mathcal{Q}^+(M^{1/2}\cdot, M)$ envoie continûment $L^2(M\,dv)$ dans $L^\infty_{3/2}(M\,dv)$, et $L^\infty_p(M\,dv)$ dans $L^\infty_{p+2}(M\,dv)$, où l'on note $L^p_k(M\,dv)$ l'espace défini par la norme $\|g\|_{L^p_k(M\,dv)} = \|(1+|v|)^k g\|_{L^p(M\,dv)}$. L'action de $\mathcal{Q}^+$ se traduit donc par un *gain d'intégrabilité en vitesses*.

Remarque 5.1. — L'idée d'introduire un opérateur de Boltzmann artificiel pour ses effets régularisants en v remonte à l'étude par Lions [Li1, p. 483] de l'équation fonctionnelle (23).

Encore faut-il en déduire un gain d'intégrabilité dans la variable x. Pour ce faire, Golse et Saint-Raymond établissent de nouveaux énoncés de type "lemmes de moyenne". Pour formuler leurs résultats de façon heuristique : si la famille (h_ε) est bornée dans $L^\infty(dt; L^1_{\mathrm{loc}} dx\, dv)$ et "uniformément intégrable par rapport à la variable v", et si en outre $(\varepsilon\partial_t + v\cdot\nabla_x)h_\varepsilon$ est bornée dans $L^1(dt\,dx\,dv)$, alors (h_ε) est faiblement relativement compacte dans $L^1_{\mathrm{loc}}(dt\,dx\,dv)$. La démonstration de ces énoncés, très surprenante, passe par l'étude des propriétés dispersives de l'opérateur $\partial_\tau + \varepsilon\partial_t + v\cdot\nabla_x$, où τ est une variable auxiliaire d'interpolation; il est encore trop tôt pour savoir si cet argument peut être remplacé par d'autres plus traditionnels.

La mise en œuvre de ces nouvelles idées se révèle particulièrement technique.

6. CONCLUSIONS ET PROBLÈMES OUVERTS

Les travaux présentés ici témoignent de progrès considérables dans le traitement des limites hydrodynamiques. Le sujet est cependant bien loin d'être épuisé, et l'on pourrait suggérer maintes améliorations de grande ampleur, faisant naître des difficultés colossales.

Tout d'abord, seul un théorème quantitatif pourrait donner une base physique incontestable à ces théorèmes asymptotiques, par exemple : à quelles conditions sur la donnée initiale et sur le nombre de Knudsen peut-on assurer que les équations hydrodynamiques sont satisfaites avec une erreur relative n'excédant pas, disons, 1% ? Même si l'on parvenait à rendre quantitatifs les arguments des preuves actuelles, on serait amené à des majorations en $O(1/\sqrt{\log|\log\varepsilon|})$, donc à des nombres de Knudsen déraisonnables ($10^{10^{1000}}$...).

D'autre part, comment traiter des limites telles que Navier-Stokes *compressible* ? Deux problèmes majeurs surviennent : le premier est notre méconnaissance mathématique des équations compressibles; le second est le fait que la dynamique de Navier-Stokes compressible ne peut être obtenue comme cas limite de la dynamique de Boltzmann : en effet, au vu de (30), les trois régimes $Kn \to 0$, $Re \to 1$, $Ma \to 1$ sont incompatibles. En fait, l'équation de Navier-Stokes compressible devrait être comprise comme une *correction de l'équation d'Euler compressible à faible nombre de Knudsen.* Non seulement une telle approximation semble de nature à échapper à jamais aux techniques de compacité, mais elle inclut en outre la limite vers le "monstre" que constitue le système d'Euler compressible...

Par ailleurs, les restrictions techniques imposées sur la section efficace excluent toutes les interactions microscopiques à longue portée. Il s'agit cependant là d'un problème technique que l'on peut envisager de surmonter à plus ou moins brève échéance.

Enfin, la pertinence des théorèmes faisant intervenir des solutions faibles peut bien sûr paraître sujette à caution tant que l'on a pas prouvé ou infirmé l'existence de solutions non régulières. Dans le cas de Navier-Stokes comme de Boltzmann, nous retrouvons là des problèmes ouverts qui comptent parmi les plus célèbres de toute la mécanique des fluides ! Cependant, notons que certains des résultats présentés dans cet exposé, et en particulier ceux qui sont basés sur la méthode d'entropie relative de Yau, garderont leur intérêt même si des solutions fortes sont construites dans le futur.

BIBLIOGRAPHIE

[Al] S. ALINHAC – *Blowup for nonlinear hyperbolic equations*, Progress in nonlinear differential equations and their applications, 17, Birkhäuser, Boston 1995.

[AK] V. ARNOLD, B. KHESIN – *Topological methods in hydrodynamics*, Springer-Verlag, New York 1998.

[As] K. ASANO – *Fluid dynamical limit of the Boltzmann equation, I*, in "Proceedings of the 13th International Conference on Transport Theory (Riccione 1993), vol. 24 (1995), pp. 329–345.

[AU] K. ASANO, S. UKAI – *On the fluid dynamical limit of the Boltzmann equation*, in "Recent topics in nonlinear PDE" (Hiroshima 1983), North-Holland, Amsterdam 1984, pp. 1–19.

[BGL1] C. BARDOS, F. GOLSE, C.D. LEVERMORE – *Sur les limites asymptotiques de la théorie cinétique conduisant à la dynamique des fluides incompressibles*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I Math. **309** (1989), 727–732.

[BGL2] C. BARDOS, F. GOLSE, C.D. LEVERMORE – *Fluid dynamical limits of kinetic equations, I : Formal derivation.* J. Statist. Phys. **63** (1991), 323–344.

[BGL3] C. BARDOS, F. GOLSE, C.D. LEVERMORE – *Fluid dynamical limits of kinetic equations, II : Convergence proofs for the Boltzmann equation*, Comm. Pure Appl. Math. **46**, 5 (1993), 667–753.

[BGL4] C. BARDOS, F. GOLSE, C.D. LEVERMORE – *Acoustic and Stokes limits for the Boltzmann equation*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I Math. **327**, 3 (1998), 323–328.

[BGL5] C. BARDOS, F. GOLSE, C.D. LEVERMORE – *The acoustic limit for the Boltzmann equation*, Arch. Rational Mech. Anal. **153**, 3 (2000), 177–204.

[BU] C. BARDOS, S. UKAI – *The classical incompressible Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation*, Math. Models Methods Appl. Sci. **1**, 2 (1991), 235–257.

[Ba] G.K. BATCHELOR – *An introduction to fluid dynamics, 2nd paperback ed.*, Cambridge University Press, Cambridge 1999.

[Bo] F. BOUCHUT – *Introduction à la théorie mathématique des équations cinétiques*, Session "L'Etat de la Recherche" de la SMF (1998), in "Kinetic equations and asymptotic theory", F. Bouchut, F. Golse, M. Pulvirenti, coll. "Series in Appl. Math.", Gauthier-Villars, 2000.

[Bn] Y. BRENIER – *Convergence of the Vlasov-Poisson system to the incompressible Euler equations*, Comm. Partial Differential Equations **25**, 3-4 (2000), 737–754.

[Br] H. BREZIS – *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, Paris 1983.

[Ca1] R.E. CAFLISCH – *The Boltzmann equation with a soft potential*, Comm. Math. Phys. **74** (1980), 71–109.

[Ca2] R.E. CAFLISCH – *The fluid dynamic limit of the nonlinear Boltzmann equation*, Comm. Pure Appl. Math. **33**, 5 (1980), 651–666.

[Ca3] R.E. CAFLISCH – *Asymptotics of the Boltzmann equation and fluid dynamics*, in "Kinetic theory and gas dynamics", Springer, Vienna 1988, pp. 95–133.

[Cn] M. CANNONE – *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes*, Diderot Ed., Paris 1995.

[Cr] T. CARLEMAN – *Sur la théorie de l'équation intégrodifférentielle de Boltzmann*, Acta Math. **60** (1932), 369–424.

[C1] C. CERCIGNANI – *The Boltzmann equation and its applications, 2nd ed.*, Springer, New York 1988.

[C2] C. CERCIGNANI – *Rarefied gas dynamics, From basic concepts to actual calculations*, Cambridge University Press, Cambridge 2000.

[CIP] C. CERCIGNANI, R. ILLNER, M. PULVIRENTI – *The Mathematical theory of dilute gases*, Springer, New York 1994.

[CKNS] L. CAFFARELLI, R. KOHN, L. NIRENBERG – *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 771–831.

[CM] A.J. CHORIN, J.E. MARSDEN – *A mathematical introduction to fluid mechanics, 3rd ed.*, Springer-Verlag, New York 1993.

[Co] F. COMETS – *Limites hydrodynamiques*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1990-91, Exp. No. 735, Astérisque **201-203** (1992), 167–192.

[D] C. DAFERMOS – *The entropy rate admissibility criterion for solutions of hyperbolic conservation laws*, J. Differential Equations **14** (1973), 202–212.

[DMEL] A. De MASI, R. ESPOSITO, J.L. LEBOWITZ – *Incompressible Navier-Stokes and Euler limits of the Boltzmann equation*, Comm. Pure Appl. Math. **42**, 8 (1989), 1189–1214.

[DG] B. DESJARDINS, E. GRENIER – *Low Mach number limit of viscous compressible flows in the whole space*, R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **455**, 1986 (1999), 2271–2279.

[DGLM] B. DESJARDINS, E. GRENIER, P.-L. LIONS, N. MASMOUDI – *Incompressible limit for solutions of the isentropic Navier-Stokes equations with Dirichlet boundary conditions*, J. Math. Pures Appl. (9) **78**, 5 (1999), 461–471.

[DPL1] R.J. DiPERNA, P.-L. LIONS – *On the Cauchy problem for the Boltzmann equation : Global existence and weak stability*, Ann. of Math. (2) **130** (1989), 312–366.

[DPL2] R.J. DiPERNA, P.-L. LIONS – *Global solutions of Boltzmann's equation and the entropy inequality*, Arch. Rational Mech. Anal. **114** (1991), 47–55.

[EM] D. EBIN, J.E. MARSDEN – *Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid*, Ann. of Math. **40** (1970), 102–163.

[EP] R.S. ELLIS, M.A. PINSKY – *The first and second fluid approximations to the linearized Boltzmann equation*, J. Math. Pures Appl. (9) **54** (1975), 125–156.

[E] D. ENSKOG – *Kinetische Theorie des Vorgänge in mässig verdünnten Gasen*, Uppsala, Almqvist & Wiksell, Trad. *Kinetic Theory of Processes in Dilute Gases*, in "Kinetic Theory" **3**, S.G. Brush, Ed., Pergamon Press, Oxford, 1972, 125–225.

[ELM1] R. ESPOSITO, J.L. LEBOWITZ, R. MARRA – *Hydrodynamic limit of the stationary Boltzmann equation in a slab*, Comm. Math. Phys. **160**, 1 (1994), 49–80.

[ELM2] R. ESPOSITO, J.L. LEBOWITZ, R. MARRA – *The Navier-Stokes limit of stationary solutions of the nonlinear Boltzmann equation*, J. Statist. Phys. **78**, 1-2 (1995), 389–412.

[ELM3] R. ESPOSITO, J.L. LEBOWITZ, R. MARRA – *On the derivation of hydrodynamics from the Boltzmann equation*, Phys. Fluids **11**, 8 (1999), 2354–2366.

[Ge1] P. GÉRARD – *Solutions globales du problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann (d'après R.J. DiPerna et P.-L. Lions)*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1988-89, Astérisque **161-162**, Exp. No. 699, 5 (1989), 257–281.

[Ge2] P. GÉRARD – *Résultats récents sur les fluides parfaits incompressibles bidimensionnels (d'après J.-Y. Chemin et J.-M. Delort)*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1991-92, Astérisque **206**, Exp. No. 757, 5 (1992), 411–444.

[GM] Y. GIGA, T. MIYAKAWA – *A kinetic construction of global solutions of first order quasilinear equations.* Duke Math. J. **50**, 2 (1983), 505–515.

[Gl] J. GLIMM – *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 697–715.

[Go] F. GOLSE – *From kinetic to macroscopic models*, Session "L'Etat de la Recherche" de la SMF (1998). In "Kinetic equations and asymptotic theory", F. Bouchut, F. Golse, M. Pulvirenti, coll. "Series in Appl. Math.", Gauthier-Villars, 2000.

[GL] F. GOLSE, C.D. LEVERMORE – *Stokes-Fourier and acoustic limits for Boltzmann equations: Convergence proofs*, Prépublication, 2001.

[GLSR] F. GOLSE, C.D. LEVERMORE, L. SAINT-RAYMOND – *La méthode de l'entropie relative pour les limites hydrodynamiques de modèles cinétiques*, Sém. EDP Ecole Polytechnique, exposé No. XIX, avril 2000.

[GLPS] F. GOLSE, P.-L. LIONS, B. PERTHAME, R. SENTIS – *Regularity of the moments of the solution of the transport equation*, J. Funct. Anal. **76** (1988), 110–125.

[GPS] F. GOLSE, B. PERTHAME, R. SENTIS – *Un résultat de compacité pour les équations de transport et applications au calcul de la limite de la valeur propre principale d'un opérateur de transport*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I Math. **301** (1985), 341–344.

[GSR] F. GOLSE, L. SAINT-RAYMOND – *The Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation: Convergence proof*, Manuscrit, 2001.

[Gr1] H. GRAD – *On the kinetic theory of rarefied gases*, Comm. Pure Appl. Math. **2** (1949), 331–407.

[Gr2] H. GRAD – *Principles of the kinetic theory of gases*, in "Flügge's Handbuch des Physik", vol. XII. Springer-Verlag, 1958, pp. 205–294.

[Gr3] H. GRAD – *Asymptotic theory of the Boltzmann equation, II*, in "Rarefied Gas Dynamics", 3rd Symposium (1962), pp. 26–59.

[Gre] E. GRENIER – *Fluides en rotation et ondes d'inertie*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I Math. **321**, 6 (1995), 711–714.

[GPV] M.Z. GUO, G.C. PAPANICOLAOU, S.R.S. VARADHAN – *Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions*, Comm. Math. Phys. **118**, 1 (1988), 31–59.

[H] D. HILBERT – *Begründung des kinetischen Gastheorie*, Math. Annalen **72** (1912), 562–577. Trad. *Foundations of the Kinetic Theory of Gases*, in "Kinetic Theory" **3**, S.G. Brush, Ed., Pergamon Press, Oxford 1972, 89–101.

[IP] R. ILLNER, M. PULVIRENTI – *Global validity of the Boltzmann equation for two- and three-dimensional rare gas in vacuum. Erratum and improved result for "Global validity of the Boltzmann equation for a two-dimensional rare gas in vacuum"*, Comm. Math. Phys. **105**, 2 (1986), 189–203; Comm. Math. Phys. **121**, 1 (1989), 143–146.

[K] M. KAC – *Probability and related topics in physical sciences*, Interscience Publishers, London-New York 1959.

[KL] C. KIPNIS, C. LANDIM – *Scaling limits of interacting particle systems*, Springer-Verlag, Berlin 1999.

[KM] S. KLAINERMAN, A. MAJDA – *Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids*, Comm. Pure Appl. Math. **34**, 4 (1981), 481–524.

[Ld] O.A. LADYZHENSKAYA – *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, New York 1969.

[LL] L.D. LANDAU, E.M. LIFSHITZ – *Fluid mechanics*, Pergamon Press, London 1959.

[La] O.E. LANFORD III – *Time evolution of large classical systems*, In "Dynamical systems, theory and applications", Springer, Berlin 1975, pp. 1–111. Lecture Notes in Phys., Vol. **38**.

[Le1] J. LERAY – *Etude de diverses équations intégrales nonlinéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique*, J. Math. Pures Appl. **12** (1933), 1–82.

[Le2] J. LERAY – *Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math. **63** (1934), 193–248.

[Le3] J. LERAY – *Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois*, J. Math. Pures Appl. **13** (1934), 331–418.

[LeMa] C.D. LEVERMORE, N. MASMOUDI – Travail en préparation.

[Li1] P.-L. LIONS – *Compactness in Boltzmann's equation via Fourier integral operators and applications, I*, J. Math. Kyoto Univ. **34**, 2 (1994), 391–427.

[Li2] P.-L. LIONS – *Compactness in Boltzmann's equation via Fourier integral operators and applications, II*, J. Math. Kyoto Univ. **34**, 2 (1994), 429–461.

[Li3] P.-L. LIONS – *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1 : Incompressible models*, The Clarendon Press Oxford University Press, New York 1996.

[Li4] P.-L. LIONS – *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 2 : Compressible models*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York 1998.

[LM1] P.-L. LIONS, N. MASMOUDI – *Incompressible limit for a viscous compressible fluid*, J. Math. Pures Appl. (9) **77**, 6 (1998), 585–627.

[LM2] P.-L. LIONS, N. MASMOUDI – *Une approche locale de la limite incompressible*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I Math. **329**, 5 (1999), 387–392.

[LM3] P.-L. LIONS, N. MASMOUDI – *From Boltzmann equations to incompressible fluid mechanics equations, I*, à paraître dans Arch. Rational Mech. Anal., 2001.

[LM4] P.-L. LIONS, N. MASMOUDI – *From Boltzmann equations to incompressible fluid mechanics equations, II,* à paraître dans Arch. Rational Mech. Anal., 2001.

[LPS] P.-L. LIONS, B. PERTHAME, P. SOUGANIDIS – *Existence and stability of entropy solutions for the hyperbolic systems of isentropic gas dynamics in Eulerian and Lagrangian coordinates*, Comm. Pure Appl. Math. **49**, 6 (1996), 599–638.

[LPT1] P.-L. LIONS, B. PERTHAME, E. TADMOR – *A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations*, J. Amer. Math. Soc. **7**, 1 (1994), 169–191.

[LPT2] P.-L. LIONS, B. PERTHAME, E. TADMOR – *Kinetic formulation of the isentropic gas dynamics and p-systems*, Comm. Math. Phys. **163**, 2 (1994), 415–431.

[MR] N.B. MASLOVA, Y.R. ROMANOVSKI – *Justification of the Hilbert method in the theory of kinetic equations*, Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz. **27**, 11 (1987), 1680–1689, 1759.

[M] C. MORREY – *On the derivation of the equation of hydrodynamics from statistical mechanics*, Comm. Pure Appl. Math. **8** (1955), 279–326.

[N] T. NISHIDA – *Fluid dynamical limit of the nonlinear Boltzmann equation to the level of the compressible Euler equation*, Comm. Math. Phys. **61**, 2 (1978), 119–148.

[OVY] S. OLLA, S.R.S. VARADHAN, H.-T. YAU – *Hydrodynamical limit for a Hamiltonian system with weak noise*, Comm. Math. Phys. **155**, 3 (1993), 523–560.

[QY] J. QUASTEL, H.-T. YAU – *Lattice gases, large deviations, and the incompressible Navier-Stokes equations*, Ann. of Math. (2) **148**, 1 (1998), 51–108.

[SR] L. SAINT-RAYMOND – *From the Boltzmann-BGK to the Navier-Stokes equations*, Prépublication, 2001.

[Sc] S. SCHOCHET – *Fast singular limits of hyperbolic PDEs*, J. Differential Equations **114**, 2 (1994), 476–512.

[Si] T. SIDERIS – *Formation of singularities in three-dimensional compressible fluids*, Comm. Math. Phys. **101**, 4 (1985), 475–485.

[SATSB] Y. SONE, K. AOKI, S. TAKATA, H. SUGIMOTO, A.V. BOBYLEV – *Inappropriateness of the heat-conduction equation for description of a temperature field of a stationary gas in the continuum limit: examination by asymptotic analysis and numerical computation of the Boltzmann equation*, Phys. Fluids **8**, 2 (1996), 628–638. Erratum dans Phys. Fluids **8**, 3 (1996), 841.

[S] H. SPOHN – *Large scale dynamics of interacting particles*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin 1991.

[T] R. TEMAM – *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis, 3rd ed.*, North-Holland, Amsterdam 1984.

[TM] C. TRUESDELL, R. MUNCASTER – *Fundamentals of Maxwell's kinetic theory of a simple monoatomic gas*, Academic Press, New York 1980.

[UA] S. UKAI, K. ASANO – *The Euler limit and initial layer of the nonlinear Boltzmann equation*, Hokkaido Math. J. **12**, 3, part 1 (1983), 311–332.

[Va] S.R.S. VARADHAN – *Entropy methods in hydrodynamic scaling*, In "Nonequilibrium problems in many-particle systems" (Montecatini 1992), Springer, Berlin, 1993, pp. 112–145.

[Vi] C. VILLANI – *A review of mathematical problems in collisional kinetic theory*, à paraître dans "Handbook of fluid mechanics", D. Serre et S. Friedlander, Ed.

[Y1] H.-T. YAU – *Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg-Landau models*, Lett. Math. Phys. **22**, 1 (1991), 63–80.

[Y2] H.-T. YAU – *Asymptotic solutions to dynamics of many-body systems and classical continuum equations*, Lecture at Current developments in mathematics, 1998.

Cédric VILLANI

École normale supérieure de Lyon
Département de Mathématiques
46, allée d'Italie
F-69364 LYON Cedex 07
E-mail : `cvillani@umpa.ens-lyon.fr`