

Ces problèmes qui les mathématiciens

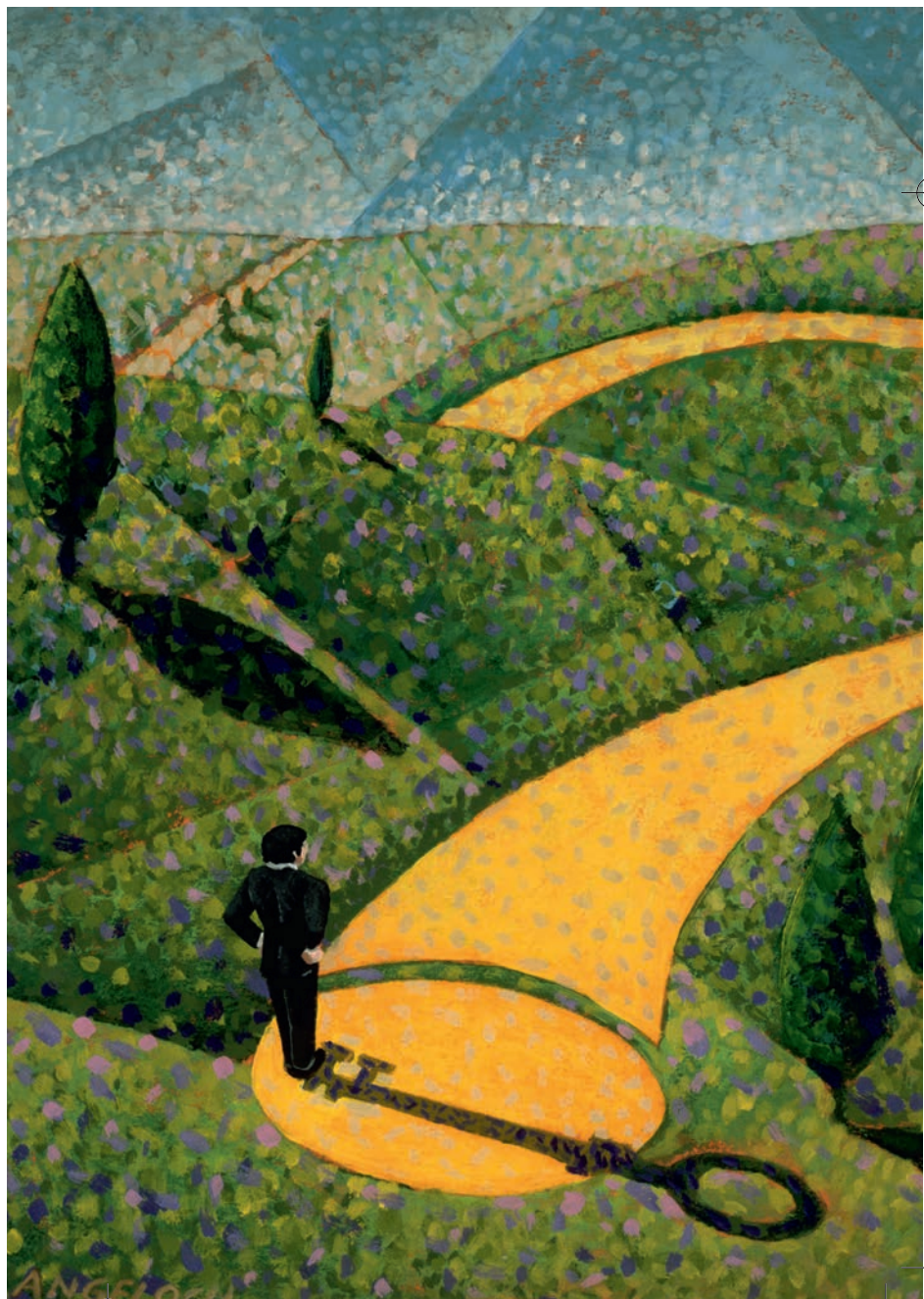
En 1900 et en 2000, des mathématiciens ont dressé une liste des problèmes les plus importants de leur temps. Ils espéraient ainsi guider les chercheurs du siècle, voire du millénaire, à venir...

De l'enseignement dispensé au lycée, on acquiert trop souvent la conviction que les mathématiques sont figées: elles semblent avoir été façonnées pour l'essentiel aux XVII^e et XVIII^e siècles, avant de se cristalliser. Ainsi, Gauss (1777-1855), avec les seules connaissances dont il disposait à 20 ans, se jouerait de tous les exercices mathématiques de nos cours de terminale scientifique actuels. Cette particularité ne s'étend pas aux disciplines telle la biologie, dont les exercices de niveau identique laisseraient Darwin (1809-1882) perplexé...

Ce recours à un savoir ancien n'est pas une mauvaise façon de procéder : il fournit de bonnes bases classiques, préliminaire presque indispensable à un travail innovant, ainsi que des qualités de raisonnement solides. Mais dans ces conditions, comment imaginer qu'il reste des choses à découvrir en mathématiques ? Dès lors, la surprise est de taille pour le grand public lorsque l'Institut Clay de mathématiques dévoile, le 24 mai 2000, une liste de « problèmes du millénaire » : sept énigmes mathématiques non résolues, dont chacune est mise à prix à un million de dollars !

Un monde envahi de problèmes ouverts

Cette annonce « coup de poing » met un peu plus en lumière la discipline, déjà sous le feu des projecteurs (l'an 2000 avait été désigné année internationale des mathématiques par l'UNESCO), et révèle à tous ce dont les mathématiciens ont une conscience aiguë : leur monde est envahi de problèmes ouverts, en attente de solution depuis un an, un siècle ou un millénaire. Les mathématiciens sont ainsi pris dans une gigantesque toile



défient

AVANT-PROPOS

de Cédric VILLANI,
professeur de mathématiques
à l'Université de Lyon, directeur
de l'Institut Henri Poincaré
(CNRS/UPMC), et lauréat
de la médaille Fields en 2010.



© Valérie Touchant-Landais

de problèmes, petits ou grands, précisément formulés ou vaguement ébauchés, examinés par une poignée de chercheurs ou par plusieurs milliers d'entre eux, et qui les obsèdent pendant une journée, une nuit, ou une vie.

Ce n'est pas la première fois qu'on tente d'établir la liste des problèmes les plus importants. En 1900, le mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943) a énoncé 23 grands problèmes ouverts, afin de guider les mathématiciens du siècle à venir. Lors de son intervention au Congrès de Paris, intitulée *Sur les problèmes futurs des mathématiques*, il a développé cette notion de problème, si centrale en mathématiques (voir *Qu'est-ce qu'un bon problème ?*, par É. Ghys, page 64).

Peut-on mesurer le progrès mathématique en fonction du nombre de problèmes résolus ? Cela n'aurait aucun sens : chaque problème résolu fait surgir dix nouvelles interrogations. Et si la liste de l'Institut Clay est plus courte que celle de Hilbert, ce n'est pas parce qu'il restait moins de problèmes à résoudre, mais parce qu'avec un million de dollars en jeu, on se devait d'être plus prudent sur la sélection ! En effet, certains des problèmes formulés par Hilbert ont été résolus presque immédiatement ; pour éviter que l'histoire ne se répète – et que l'argent de Landon Clay ne fonde trop –, on n'a donc conservé, pour la

liste du millénaire, que des problèmes de première importance et de première difficulté.

Beaucoup de mathématiciens pensaient qu'aucune de ces énigmes ne serait résolue avant plusieurs décennies. C'était sans compter le génie de Grigori Perelman, un mathématicien russe connu pour ses remarquables contributions à la géométrie non euclidienne. À la stupéfaction générale, il annonça en 2003 avoir résolu un des problèmes de la liste, et non le moindre : la presque centenaire conjecture de Poincaré, emblématique de la topologie (voir *Géométriser l'espace : de Gauss à Perelman*, par É. Ghys, page 56).

Comment les mathématiciens résolvent-ils les énigmes ?

Comment G. Perelman, en sept ans de travail solitaire et secret, a-t-il vaincu l'une des plus grandes énigmes mathématiques du siècle ? Chaque chercheur a sa propre théorie sur le processus de solution, qui se déroule selon d'innombrables variantes. On n'en a que peu de témoignages directs, à l'exception notable de celui de Henri Poincaré (1854-1912) : dans ses écrits autobiographiques, le mathématicien évoque des illuminations qui ont surgi de façon inattendue après une longue période d'imprégnation. Pour ma part, je distingue aussi plusieurs périodes : une première phase, longue, où l'on est plongé dans l'obscurité totale ; puis une deuxième, où s'allume une lueur faible et diffuse, qui laisse entrevoir quelque chose d'intéressant ; et enfin, c'est l'illumination, le moment où l'on comprend, rédige, recoupe, publie et partage avec ses pairs le résultat.

Bien sûr, on reste la plupart du temps bloqué à la première ou à la deuxième étape. Et dans les

LE CHEMIN DES MATHÉMATIENS est pavé de multiples problèmes, grands et petits. Hilbert, en 1900, et l'Institut Clay, en 2000, ont tenté d'établir la liste des plus importants. La plupart des problèmes de Hilbert sont aujourd'hui résolus, au moins en partie, tandis qu'un seul de ceux de l'Institut Clay a été « vaincu ».

images.com/combis

cas où l'on atteint la troisième, ce moment intense est inéluctablement suivi d'une légère dépression, où l'on se dit qu'« après tout, c'était si facile »...

Les problèmes ont accompagné toute mon histoire personnelle en mathématiques. À l'époque du collège, ceux sur la géométrie du

Même pendant qu'elles résistent, les énigmes mathématiques jouent souvent un rôle fondamental, en inspirant des théories nouvelles.

triangle m'ont passionné et m'ont permis d'exercer mon sens de la démonstration. À près les exercices d'étudiants, dont le professeur connaissait la réponse, sont venus les problèmes de recherche, les plus motivants, ceux dont personne ne sait *a priori* s'ils ont une solution : d'abord ceux que m'a posés mon directeur de thèse, puis ceux que je me suis posés moi-même ou qui ont surgi au hasard de rencontres. Celles-ci m'ont parfois apporté l'étincelle nécessaire à la résolution d'un problème qui m'était familier : certaines idées de base de mes travaux sur la production d'entropie par les collisions dans un gaz (voir *Les équations de l'irréversibilité*, par C. Mouhot, page 106) sont ainsi issues d'un travail commun avec Giuseppe Toscani, de l'Université de Pavie, en Italie. Dans d'autres cas, ces rencontres m'ont fourni un problème que j'ignorais, mais dont je connaissais tous les ingrédients nécessaires à la résolution.

Quoi qu'il en soit, à la fin, le problème et sa solution forment un tout : ce n'est qu'à la lumière de la solution et de ses enseignements que l'on peut déterminer si l'on était face à un « bon problème », et évaluer son importance. En cela, une énigme de mathématiques ressemble un peu à celle d'un roman policier. L'intérêt d'un tel roman n'est pas seulement l'identification du coupable, mais aussi la façon dont on prouve irréfutablement sa culpabilité, autrement dit le raisonnement qui permet de le confondre ; de même, dans un problème mathématique, la démonstration de la solution doit apporter son lot d'enseignements.

Chaque jour, des milliers de démonstrations sont élaborées par des mathématiciens. Les problèmes résolus, plus ou moins importants et plus ou moins techniques, ont des retentissements divers, allant parfois jusqu'à faire les gros titres des journaux. Des ouvrages de vulgarisation en popularisent certains, tels le grand théorème de Fermat, démontré en 1994 par le mathématicien anglais Andrew Wiles, alors à l'Université de Princeton,

aux États-Unis, et la conjecture de Poincaré (voir *Anthologie des grandes résolutions*, page 112). Ces grandes résolutions font rêver, non seulement la communauté scientifique par les nouveaux concepts mis en jeu et la réorganisation des domaines qui en résulte, mais aussi la société entière par l'aventure humaine sous-jacente. Ainsi, la conjecture de Poincaré a inspiré le créateur de haute couture Issey Miyake.

Malgré cela, nous n'avons découvert que quelques îlots de connaissance au milieu d'un océan d'inconnu. Nous savons si peu de choses ! Ce n'est pas un discours pessimiste, au contraire : cette rareté ne rend que plus précieux le savoir accumulé, et plus unique aussi chaque nouvelle victoire face à l'inconnu. Loin d'être découragés par l'ampleur du travail restant, les chercheurs y puisent leur force et leur motivation.

Résistance utile

Résoudre un problème peut prendre un temps considérable. Mais même pendant qu'elles résistent, les énigmes mathématiques jouent souvent un rôle fondamental, en inspirant des théories nouvelles. Ainsi le grand théorème de Fermat a motivé l'exploration de branches entières de la théorie des nombres, et la conjecture de Poincaré a accompagné l'histoire de toute la topologie au XX^e siècle, donnant lieu à trois médailles Fields.

Si l'on demande à un mathématicien quel est le plus grand problème mathématique du monde, il citera probablement l'hypothèse de Riemann (voir *L'hypothèse de Riemann*, par P. Meier et J. Steuding, page 8). Formulée par le mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866) il y a plus de 150 ans, elle résiste toujours à nos tentatives de démonstration, tel un sommet inaccessible. Ce dossier commencera donc par cette énigme, qui figure aussi bien sur la liste de Hilbert en 1900 que sur celle de l'Institut Clay en 2000. On évoquera ensuite d'autres problèmes présents sur l'une ou l'autre de ces listes emblématiques, avant de s'intéresser à quelques problèmes qui n'y figurent pas, mais qui se révéleront peut-être plus importants, qui sait ? Telle solution inattendue d'une énigme en apparence secondaire pourrait être déterminante pour une communauté spécialisée de chercheurs ou pour l'ensemble des mathématiciens.

Nous concluons ce dossier par quelques résolutions célèbres, qui ont fait rêver des générations de mathématiciens : celles des équations algébriques de haut degré, du grand théorème de Fermat, de la conjecture de Poincaré... Ces aventures humaines et scientifiques éblouissantes – et rares, au plus une par décennie ! – ont marqué à jamais l'histoire des mathématiques. ■

livres

- A. BELLOS, *Alex au pays des chiffres : Une plongée dans l'univers des mathématiques*, Robert Laffont, 2011.
- D. O'SHEA, *Grigori Perelman face à la conjecture de Poincaré*, Belin, 2007.
- U. BOTTAZZINI, *Poincaré. Philosophe et mathématicien*, Belin-Pour la Science, 2002.
- S. SINGH, *Le dernier théorème de Fermat*, Hachette Littérature, 1999.
- R. SORTAIS et Y. SORTAIS, *La géométrie du triangle*, Hermann, 1997.
- H. POINCARÉ, *Science et méthode*, Flammarion, 1947 (disponible sur jubilotheque.upmc.fr).

internet

- www.claymath.org/millennium/
- www.poincare.fr